Universidade de Lisboa

Faculdade de Ciências

Departamento de Matemática

A temática das Sucessões nos currículos de Matemática

Ana Margarida Carrasco Correia Troncão

Dissertação

Mestrado em Matemática para Professores

2012/ 2013

(Não utilizo o novo acordo ortográfico)

Universidade de Lisboa

Faculdade de Ciências

Departamento de Matemática

A temática das Sucessões nos currículos de Matemática

Ana Margarida Carrasco Correia Troncão

Dissertação

Mestrado em Matemática para Professores

Dissertação elaborada sob orientação de:

Professora Doutora Suzana Nápoles, Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Sumário:

Pretende-se neste trabalho analisar como as sucessões são trabalhadas nos diferentes níveis de ensino, do básico ao superior, e perspetivar abordagens que potenciem o seu estudo em contextos variados, favorecendo o estabelecimento de conexões entre a álgebra e a geometria.

Summary of Master's Thesis which title is *The theme of successions in the Mathematics curriculum*.

The aim of this work is to analyze how the sequences are worked at different levels of education, from basic to higher education, and outline approaches that enhance their study in different contexts, favoring the establishment of connections between algebra and geometry.

Agradecimentos

Costuma dizer-se que muitas coisas da nossa vida acontecem quando menos esperamos. E, a realização deste mestrado tão pensado e desejado, mas "deixado para um dia" não foi excepção...

Tudo começa (inesperadamente) quando vou leccionar apoios pedagógicos acrescidos (APAs) para a Escola EB 2, 3 Piscinas nos Olivais e conheço a coordenadora do Grupo de Matemática, a Professora Margarida Oliveira. Este fantástico ser humano convida informalmente todos os colegas de grupo a assistirem a umas palestras sobre Isometrias. Essas sessões marcaram, sem dúvida alguma, o meu percurso formativo! As palestras semanais ou quinzenais eram ministradas por um senhor com uma agilidade mental contagiante, um senhor distinto, peculiar e algo irreverente nas suas ideias, bem como na forma de as expor, tendo ainda uma notável desenvoltura nas novas tecnologias da Apple! Falo do admirável e inesquecível Professor Eduardo Veloso. Um octogenário com um espírito jovial e com um prazer imenso em partilhar os seus conhecimentos!

No decorrer destas sessões, tive oportunidade de comentar com a Margarida o quão bem me estava a fazer "voltar a estudar" e as saudades que descobri ter, de exercitar a mente! Após alguns desabafos destes, a Margarida O. Convida-me a ir com ela frequentar uma acção de formação na FCUL, Matemática Aplicada às Ciências da Natureza. Após lhe darmos início, apercebo-me que esta acção é uma cadeira que integra o Mestrado que melhor se adequava ao meu percurso formativo e profissional, tomando nesse momento a decisão de lhe dar início.

Portanto e atendendo ao exposto acima, começo com um profundo e sincero agradecimento à Margarida Oliveira e também ao professor Eduardo Veloso pelo impulso inicial que me deram.

Desde que terminei a licenciatura o meu irmão, Pedro Troncão, sempre que podia, perguntava-me "Para quando o mestrado? Força aí que eu sei que consegues, sabes que o mano acredita em ti!..." Este permanente empurrão não me permitia esquecer esta hipótese! Já durante a frequência deste mestrado, numa fase menos motivada, o discurso do meu pai, numa conversa telefónica, foi decisivo para não perder o objectivo de o finalizar nem desanimar antes de uma época de exames. Um especial e muito forte obrigada aos "homens da minha vida" pelo apoio que sempre me deram e pelo desejo constante que exteriorizavam em me ver bem sucedida! Esse incentivo permanente não me permitiu desanimar, vacilar ou desviar-me da meta final! Claro que, a minha mãe, tem aqui um papel estrutural e de força motriz em todos estes gestos, pois sem ela e sem a sua perseverança nada disto seria possível! Ao mais fantástico ser humano que alguma vez já conheci (e que por acaso é a minha mãe) agradeço todos os dias tudo o que tenho e muito do que sou! Obrigada mãe!

Por último, preciso de agradecer aos meus amigos mais chegados que nunca sequer puseram em causa a minha capacidade de concluir este projecto a que dei início e me incentivaram sempre a continuar! Sempre acreditaram e sempre me apoiaram em todas as diferentes etapas!...

E, claro, do fervilhar de ideias até ao "dar corpo a uma tese" vai uma organização e uma orientação que sem a definição concreta de objectivos nem um caminho lógico orientado, este trabalho não seria possível! Muito obrigada por acreditar e ajudar-me a concretizá-lo, Professora Doutora Suzana Nápoles.

Índice

Capítulo I - Introdução 7

Capítulo II - Análise Curricular 8

Capítulo III - Experiências curriculares explorando a intuição de conceitos 12

Capítulo IV - Noções básicas e exemplos 21

IV.1 - Terminologia e notações 21

IV.2 - Exploração da noção de limite 33

IV.3 - Aplicações 42

IV.3.1 - O número π 43

IV.3.2 - O número e 54

IV.3.3 - A sucessão de Fibonacci e o número φ 60

Capítulo V - Sugestões e correspondente enquadramento curricular 70

Capítulo VI - Conclusões 73

Referências 74

Capítulo I - Introdução

O propósito deste trabalho é analisar a forma como a temática das sucessões é actualmente abordada no programa nacional de Matemática do ensino básico e secundário. Pretende-se com este trabalho analisar as inúmeras definições e termos utilizados, clarificá-los e, apresentar sugestões para que o tratamento deste tema crie uma ponte entre os diversos conteúdos, ao longo de todos os anos escolares. A ideia fundamental é manter presente o tema das sucessões ao longo dos diferentes níveis de escolaridade associando-o permanentemente a outros conteúdos onde as sucessões estão presentes e nem sempre relembradas, como é o caso da geometria, das funções, da trigonometria e da própria álgebra.

Começa-se por fazer uma análise às orientações curriculares desde o primeiro ciclo até ao Ensino Secundário, com ênfase na temática das sucessões. De seguida é apresentada uma actividade que foi aplicada como experiência curricular, onde se exploram os conceitos tratados nos 8º e 9ºs anos de escolaridade, mas de uma forma intuitiva (e se aplicam a alunos de 5º e 6º anos sinalizados para o Apoio Escolar de Matemática).

Após a actividade supra referida, que poderá servir de argumento para uma possível/ alternativa abordagem destes conceitos (atendendo à boa prestação indiciada pelos alunos participantes), é feita uma apresentação de noções básicas de sucessões, acompanhadas de exemplos.

Explora-se, em seguida, a noção de limite, concretizada com os bem conhecidos números “pi”, π , o número de Neper, e , e “fi”, φ .

Na fase final, são feitas algumas sugestões e indicados os respectivos enquadramentos curriculares, que podem contribuir para estabelecer um possível fio condutor entre as abordagens do tema das sucessões nos vários níveis de ensino.

Capítulo II - Análise Curricular

O programa de 2007 prevê a introdução do pensamento algébrico logo **no primeiro ciclo**, com o reconhecimento de sequências e regularidades. Um dos objectivos associado ao pensamento algébrico passa pelos alunos reconhecerem regularidades e compreender relações entre números ou imagens. O outro, é realizar autonomamente exploração de regularidades, formulando e testando conjecturas, sendo capazes de as testar e sustentar. Estes objectivos promovem um maior envolvimento dos alunos na elaboração do seu conhecimento.

Ainda no primeiro ciclo, este programa defende que os alunos devem procurar estabelecer relações simples entre números, procurando a exploração de situações relacionadas com regularidades de acontecimentos, formas, desenhos e conjuntos de números. Os alunos também podem, ainda, formular por si próprios "*(…) regularidades em sequências de números finitas ou infinitas (estas usualmente chamadas sucessões) e podem também observar padrões de pontos e representá-los tanto geométrica como numericamente, fazendo conexões entre a geometria e a aritmética.*" No tópico das *Regularidades* do primeiro ciclo e o subtópico das *Sequências*, tem como objectivo específico "*Elaborar **sequências** de números segundo uma dada lei de formação e investigar regularidades em sequências e em tabelas de números*", e, como notas, propõe como exemplos, "*os **números pares**; começar com 1 e adicionar 3 sucessivamente; duplicar o número 2 e adicionar 1, obtendo a sequência 2, 5, 11, 23,…*". ([15])

Para o **segundo ciclo**, as indicações metodológicas propõem que o trabalho com sequências seja continuado, inventando ou continuando sequências de números, pois "*a resolução de problemas que incluam a investigação de regularidades numéricas constitui um aspecto a privilegiar da didáctica dos números neste ciclo de ensino*". Como nota, o programa propôs estudar regularidades com potências, por exemplo regularidades do algarismo das unidades de potências com a mesma base e expoentes diferentes. Se no primeiro ciclo os alunos desenvolvem o pensamento algébrico quando investigam sequências numéricas e padrões geométricos, já no 2º ciclo ampliam e aprofundam esse trabalho, explorando padrões, determinando termos de uma sequência a partir da sua lei de formação e uma lei de formação pelo estudo da relação entre os seus termos. No campo da Geometria, este programa porpôs ainda a determinação experimental de um valor aproximado de π, como veremos mais adiante neste trabalho o que, nem sempre, se verifica em manuais escolares e/ ou práticas lectivas. Como conceitos específicos o programa de 2007 refere que o estudo de sequências envolve o trabalho com números e operações, proporcionando o estabelecimento de relações e a explicitação de leis de formação. ([15])

No tópico de sequências e regularidades, este programa tem como objectivos específicos identificar e dar exemplos de sequências e regularidades numéricas e não numéricas; determinar o termo seguinte (ou o anterior) a um dado termo e ampliar uma sequência numérica conhecendo a sua lei de formação; determinar termos de ordens variadas de uma sequência sendo conhecida a sua lei de formação; Analisar as relações entre os termos de uma sequência e indicar uma lei de formação, utilizando a linguagem natural e simbólica. Já como notas, propõe usar a calculadora na exploração de regularidades numéricas.

Já para o **terceiro ciclo** e apesar de nada estar referido nos objectivos gerais de aprendizagem sobre sequências e regularidades, temos nos objectivos específicos a indicação de que os alunos devem resolver problemas e investigar regularidades envolvendo números racionais e reais. No campo da Álgebra, pode ler-se que "*a partir do estudo de sequências iniciado anteriormente, representa-se simbolicamente o termo geral*". As indicações metodológicas neste aspecto são as de retomar a investigação de sequências e regularidades já realizada nos ciclos anteriores com vista a aprofundar o estudo de relações algébricas e a sua simbolização, fundamental para o desenvolvimento da noção de variável e para a compreensão da linguagem algébrica. Os subtópicos relacionados com o de Sequências e Regularidades são: o termo geral de uma sequência numérica e sua representação; Expressões algébricas. Como objectivos específicos associados, pode ler-se: "*Compreender a noção de termo geral de uma sequência numérica e representá-lo usando símbolos matemáticos adequados; determinar um termo geral de uma sequência numérica e termos de várias ordens a partir do termo geral; compreender os diferentes papéis dos símbolos em álgebra; e, simplificar expressões algébricas.*" Já como notas, este programa propõe a representação de sequências de fracções em que os denominadores tenham relações simples, por exemplo $\frac{2n}{n+1}$ e $\frac{n+1}{n+3}$; e, propões também a distinção entre "variável", "constante" e "parâmetro".

Também o tópico do raciocínio matemático tem uma nota associada especificamente às regularidades, que sugere o seguinte: "*Proporcionar situações em que os alunos raciocinem indutivamente (formulando conjecturas a partir de dados obtidos na exploração de regularidades) e dedutivamente (demonstrando essas conjecturas).*" ([15])

Quanto às indicações metodológicas, em todos os ciclos é feita uma referência concreta e sustentada do recurso às tecnologias que dispomos em computadores e calculadoras para a realização de cálculos complexos que auxiliem e agilizem a exploração de regularidades numéricas em tarefas de investigação ou na resolução de problemas. Ou seja, em situações em que o objectivo não seja o desenvolvimento de capacidades de cálculo, mas de outras aprendizagens que a tarefa envolva. Para o 3º ciclo, o programa de 2007 já explicita que no computador deve recorrer-se à folha de cálculo excel e outras applets, que permitam experiências com números e regularidades numéricas, bem como o trabalho com situações reais que, sem estes recursos seriam difíceis de realizar/ executar. Ou, a serem possíveis de realizar, perder-se-ia imenso tempo nos cálculos intermédios até se poderem tirar conclusões dos valores obtidos. O programa defende ainda que "*deve tirar-se partido das possibilidades de experimentação que os* *computadores oferecem nos domínios geométrico e numérico e no tratamento de dados.”* ([15])

Existe uma quebra deste desenvolvimento temático no ensino secundário. Se nos focarmos sobre o Programa de Matemática do Ensino Secundário de Matemática A, apenas no 11º ano é feita uma abordagem às sucessões quando, no 10º ano poderia aproveitar-se o tema da Geometria e das Funções para lhes fazer uma breve referência ou recordação do tema. No 11º ano, a resolução de problemas permite chegar ao conceito de sucessão, aceder à compreensão de propriedades importantes de sucessões particulares e especialmente úteis, como é o caso da primeira definição do número e e do estudo intuitivo da sucessão de termo geral $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ num contexto de modelação matemática. No desenvolvimento da temática das sucessões neste ano de ensino, os alunos estudam ainda propriedades como monotonia e limitação, progressões aritméticas e geométricas, limites (envolvendo infinitamente grandes e infinitamente pequenos), limites de sucessões e convergência, convergência de sucessões monótonas e limitadas, problemas de limites com progressões e estudo de casos simples de caos, usando sucessões definidas por recorrência.

Se nos debruçarmos sobre o programa de Matemática B do Ensino Secundário, somente no 12º ano é que são abordadas as sucessões e destas, apenas as progressões são trabalhadas, observando-se que, igualmente com o que se sugere para a Matemática A, fossem aproveitados nos 10º e 11º anos os temas de funções, e de exploração das capacidades das calculadoras e computadores.

No que respeita ao programa de MACS (Matemática Aplicada às Ciências Sociais), a situação é semelhante aos casos anteriormente analisados: existe um enorme recurso às capacidades das calculadoras, onde exploram as potencialidades das novas tecnologias associando-as à Estatística e Probabilidades, aos problemas de matemáticos da área financeira e de juros, mas não existe qualquer referência às sucessões nem ao juro composto, que pode ser calculado com base no número e.

Analisando o novo programa e Metas para o Ensino Básico verifica-se que se quebra a continuidade do tema no ensino básico: surge pela primeira vez n 2º ano, reaparece no 6º ano e no 7º ano estabelece uma separação entre o conceito de sequência e sucessão. ([22])

“*Definir sequências e sucessões*
1. Identificar, dado um número natural , uma «sequência de N elementos» como uma função de domínio {1,2,..., N } e utilizar corretamente a expressão «termo de ordem n da Sequência» e «termo geral da sequência».
2. Identificar uma «sucessão» como uma função de domínio $\mathbb{N}$, designando por u_n a imagem do número natural n por u e utilizar corretamente a expressão «termo de ordem n da sucessão» e «termo geral da sucessão». ([2])

Esta separação gera incoerências ao apresentar exemplos (nos cadernos de apoio) de ”sequências” que, de acordo com as definições adoptadas, são “sucessões”.

Este programa não estimula a interligação desta temática com outros conteúdos e não faz referência à utilização de qualquer tipo de tecnologia.

Capítulo III - Experiências curriculares explorando a intuição de conceitos

Para este tema das sucessões, destinado a ser tratado no 3º ciclo, resolvi criar um conjunto de actividades, chamadas “adivinhas de números”, recorrendo a representações geométricas e aplicá-las ao 2º ciclo. Não usei em momento algum as palavras “sucessão” ou “sequência”. (Acredito que a forma aleatória como se utilizam estas duas palavras pode comprometer a compreensão deste conceito tão fundamental e intuitivo.) A particularidade é que as realizei aos alunos selecionados para o apoio escolar em Matemática de 5º e 6ºs anos de escolaridade (apesar de alguns elementos das turmas que me cederam terem também participado, levados pela “curiosidade das adivinhas”!...). Este tema foi explorado na Escola EB 2, 3 Abade Correia da Serra, em Serpa e, os resultados foram surpreendentes, na medida em que os alunos supostamente mais fracos e encaminhados para o apoio são os que tiveram melhores prestações nestas actividades. As sucessões intuídas foram: a sucessão dos números naturais, n, a sucessão dos números pares, $2n$, a sucessão dos números ímpares, $2n-1$, a sucessão dos quadrados perfeitos, n^2, a sucessão dos números triangulares, $\frac{n(n+1)}{2}$, e, a sucessão alternada $(-1)^{n-1}$. É espantoso como alguns alunos conseguiram dar resposta às “adivinhas” (retiradas maioritariamente de manuais escolares do 8º ano de escolaridade), intuindo que obedeciam a uma regra que as fazia ser crescentes, decrescentes ou limitadas. Uns alunos recorreram a desenhos, enquanto outros optaram por aplicar o mesmo cálculo ao número seguinte e, também dessa forma, chegar correctamente aos termos pretendidos de cada uma das sucessões apresentadas!

A introdução da actividade, foi feita oralmente por mim onde, e antes de distribuir os enunciados, apelei à atenção destes alunos para os números que já eram apresentados e que eles deviam (para dar resposta à adivinha) encontrar uma lógica coerente para conseguirem identificar quais os números que deveriam surgir a seguir.

Após a apresentação da actividade realizada, em Março de 2012, seguem-se alguns excertos de respostas destes alunos e respectivos comentários que, no fundo, corroboram perfeitamente com a ideia de que, mesmo sem qualquer contacto teórico aprofundado sobre o tema das sucessões, os alunos do 2º ciclo conseguem de forma simplesmente intuitiva responder correctamente:

Adivinhando números

Desafio de Matemática

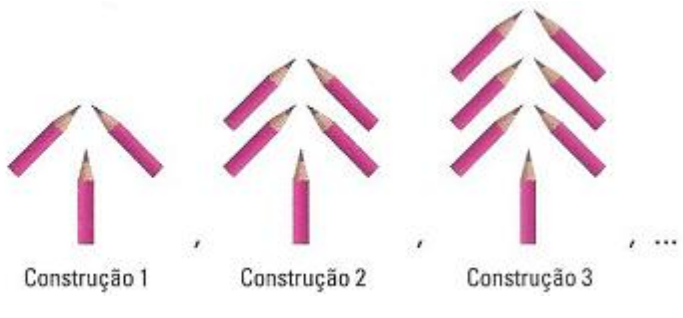
Escola EB 2, 3 Abade Correia da Serra Março 2013

Nome do Aluno ________________________ N.º _____Ano___ Turma ___

1. Quais são os números que virão a seguir? Preenche os três espaços em branco.
   (a) 1, 2, 3, 4, ___, ___, ___, …
   (b) 2, 4, 6, 8, ___, ___, ___, …
   (c) 1, 3, 5, 7, ___, ___, ___, …
   (d) 1, 6, 11, 16, ___, ___, ___, …
   (e) 300, 250, 200, ___, ___, ___, …
   (f) 1, -1, 1, -1, ___, ___, ___, …

2. Para obteres os números seguintes aos que te foram apresentados no exercício anterior, tiveste que obedecer a uma certa lógica para os descobrires. Explica por palavras tuas como podes obter uma regra que te permita descobrir os números seguintes, a partir de outros já conhecidos.
   ____
   ____
   ____
   ____

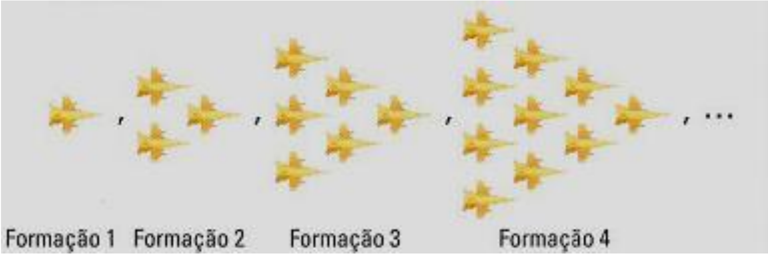
3. Observa a figura seguinte, de construções formadas com lápis. Admite que o padrão se mantém para as seguintes construções. Desenha a construção 4.



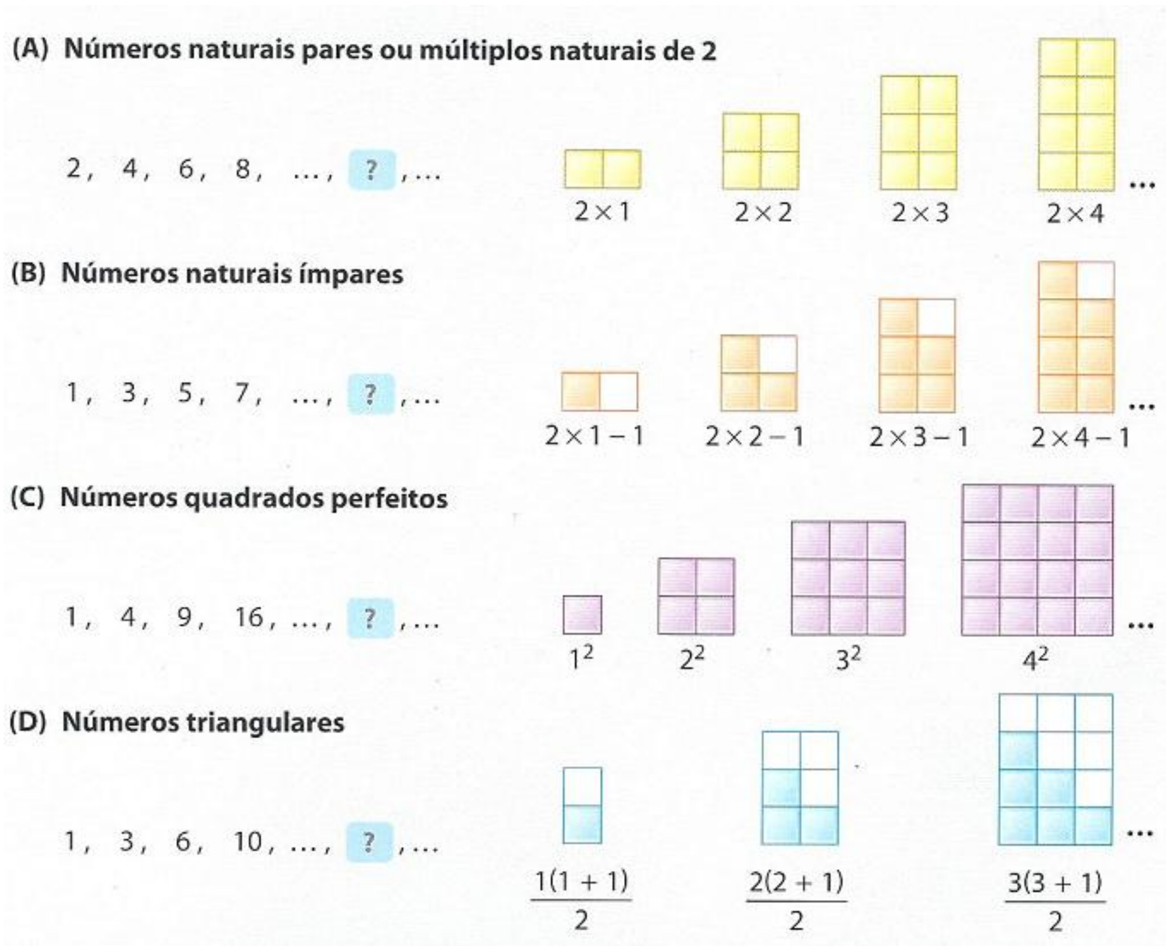
Construção 4

4. O Alex ouviu um ruído provocado por aviões. Observou o céu e viu a formação representada na figura seguinte.

Tinha como trabalho de casa desenhar um conjunto de figuras, por isso decidiu desenhar aviões. Admite que o padrão se mantém para as seguintes formações. Quantos aviões terá a formação 5?____



5. Considera os números apresentados e as correspondentes figuras de cada um deles. Imagina que as figuras e os números continuam, obedecendo à mesma lei de formação. Indica os dois números seguintes de cada uma das situações e, se achares que te ajuda, desenha primeiro as figuras que lhes correspondem.



([4], [10], [14] e [17])

Vejamos alguns excertos das respostas recolhidas pelos alunos, onde podemos facilmente observar as estratégias adoptadas por eles e, o tipo de raciocínio abstracto a que recorreram para dar resposta às questões apresentadas:

Na questão 1, talvez por trabalharem com alguma frequência este tipo de exercícios, praticamente todos os alunos deste estudo, tanto do 5º ano como do 6ºano, responderam correctamente. Porém, na questão 2, obtiveram-se algumas respostas interessantes, onde se verificam as diferenças de raciocínio. Vejamos primeiro algumas das respostas dadas por alunos do 5º ano e, posteriormente do 6º ano:

2. Para obteres os números seguintes aos que te foram apresentados no exercício anterior, tiveste que obedecer a uma certa lógica para os descobrires. Explica por palavras tuas como podes obter uma regra que te permita descobrir os números seguintes, a partir de outros já conhecidos.

Uma das regras é pensar antes de escrever.

Esta aluna respondeu correctamente a todas as alíneas da questão 1 e revelou muita prudência antes de dar a sua resposta.

2. Para obteres os números seguintes aos que te foram apresentados no exercício anterior, tiveste que obedecer a uma certa lógica para os descobrires. Explica por palavras tuas como podes obter uma regra que te permita descobrir os números seguintes, a partir de outros já conhecidos.

Podemos fazer de 1 em 1, 2 em 2, 5 em 5.
Eu fiz de 1, 2 e 5, mas ainda á mais.

À parte dos erros ortográficos, também esta aluna respondeu correctamente a todas as alíneas da questão 1. Podemos também observar que esta aluna, mesmo sem qualquer contacto teórico, tem noção que existem inúmeras leis de formação para obter os termos seguintes de uma sucessão, observando apenas os que são dados.

Estas duas respostas, destes dois alunos são semelhantes na "simplificação" de como obter correctamente os termos seguintes de uma sucessão, intuindo facilmente que observando se a sucessão é crescente, decrescente ou alternada, bastará observar os termos dados, e continuar a seguir a lei de formação apresentada para a obtenção dos termos seguintes.

2. Para obteres os números seguintes aos que te foram apresentados no exercício anterior, tiveste que obedecer a uma certa lógica para os descobrires. Explica por palavras tuas como podes obter uma regra que te permita descobrir os números seguintes, a partir de outros já conhecidos.

vamos sempre tirando e pondo

2. Para obteres os números seguintes aos que te foram apresentados no exercício anterior, tiveste que obedecer a uma certa lógica para os descobrires. Explica por palavras tuas como podes obter uma regra que te permita descobrir os números seguintes, a partir de outros já conhecidos.

Basta saber ~~o numero d~~ de quanto em quanto é que vam o numero aumentando ou baixando

As duas respostas que se seguem agora, apesar de não terem qualquer referência à observação dos termos já dados, são talvez as mais metódicas e estruturadas, na medida em que definiram, para todas as alíneas, todas as leis de formação utilizadas.

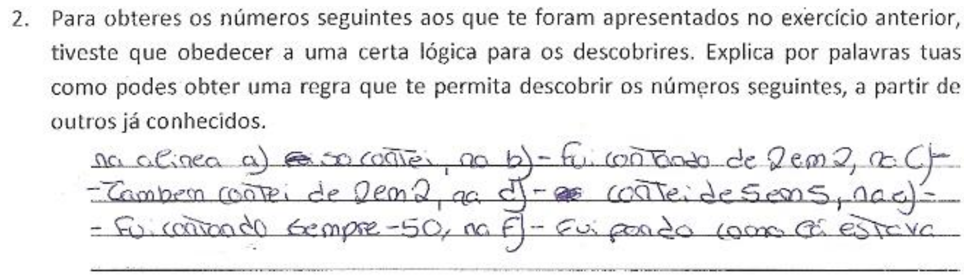
2. Para obteres os números seguintes aos que te foram apresentados no exercício anterior, tiveste que obedecer a uma certa lógica para os descobrires. Explica por palavras tuas como podes obter uma regra que te permita descobrir os números seguintes, a partir de outros já conhecidos.

Na alínea A contei de 1 em 1
Na alínea B contei de 2 em 2
Na alínea C contei de 2 em 2
Na alínea D contei de 5 em 5
Na alínea E contei para trás
Na alínea F contei de 1 em 1.

2. Para obteres os números seguintes aos que te foram apresentados no exercício anterior, tiveste que obedecer a uma certa lógica para os descobrires. Explica por palavras tuas como podes obter uma regra que te permita descobrir os números seguintes, a partir de outros já conhecidos.

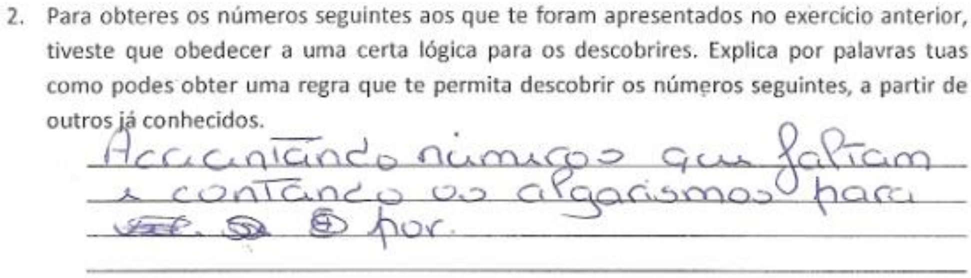
a) foi só acrescentar um b) foi acrescentar 2 c) foi tambem acrescentar 2. d) foi acrescentar 5 e) foi retirar 50 f) foi meter só o sinal e o um.

Já esta questão no 6º ano, teve algumas respostas em branco e, é de destacar que foram semelhantes às dadas pelos alunos do 5º ano. Apresentam-se as três mais representativas das respostas correctas, cujos comentários são análogos aos já feitos para as respostas analisadas do 5º ano:



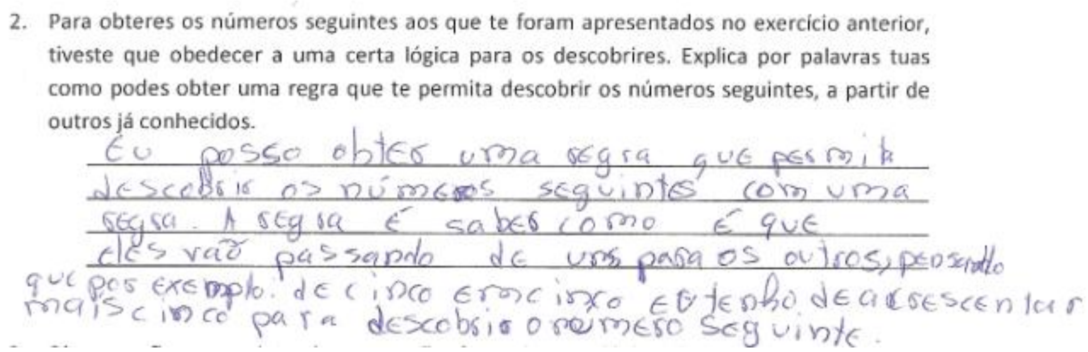
2. Para obteres os números seguintes aos que te foram apresentados no exercício anterior, tiveste que obedecer a uma certa lógica para os descobrires. Explica por palavras tuas como podes obter uma regra que te permita descobrir os números seguintes, a partir de outros já conhecidos.

na alinea a) só contei, na b) - fui contando de 2 em 2, na c) - tambem contei de 2 em 2, na d) - contei de 5 em 5, na e) - fui contando sempre -50, na f) - fui pondo como já estava



2. Para obteres os números seguintes aos que te foram apresentados no exercício anterior, tiveste que obedecer a uma certa lógica para os descobrires. Explica por palavras tuas como podes obter uma regra que te permita descobrir os números seguintes, a partir de outros já conhecidos.

Acrecentando numeros que faltam e contando os algarismos para por.



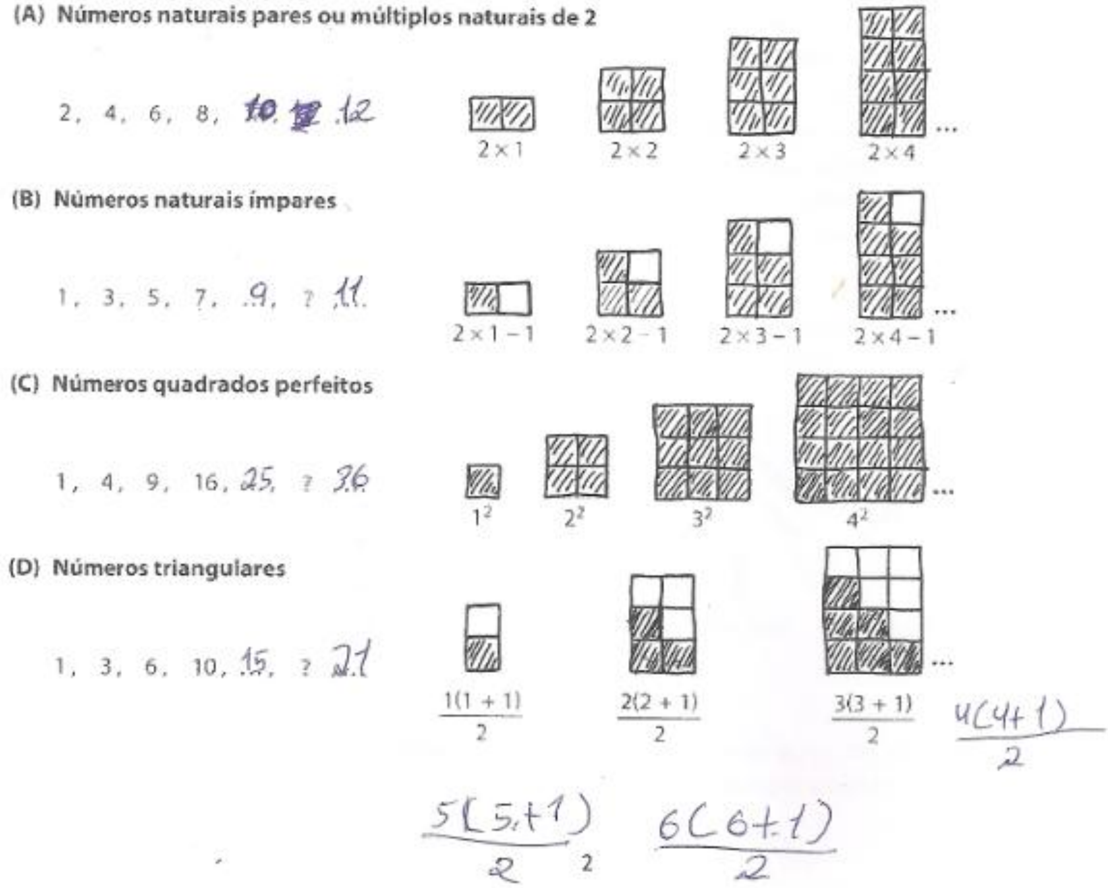
2. Para obteres os números seguintes aos que te foram apresentados no exercício anterior, tiveste que obedecer a uma certa lógica para os descobrires. Explica por palavras tuas como podes obter uma regra que te permita descobrir os números seguintes, a partir de outros já conhecidos.

Eu posso obter uma regra que permite descobrir os números seguintes com uma regra. A regra é saber como é que eles vão passando de uns para os outros, pensando que por exemplo de cinco em cinco eu tenho de acrescentar mais cinco para descobrir o número seguinte.

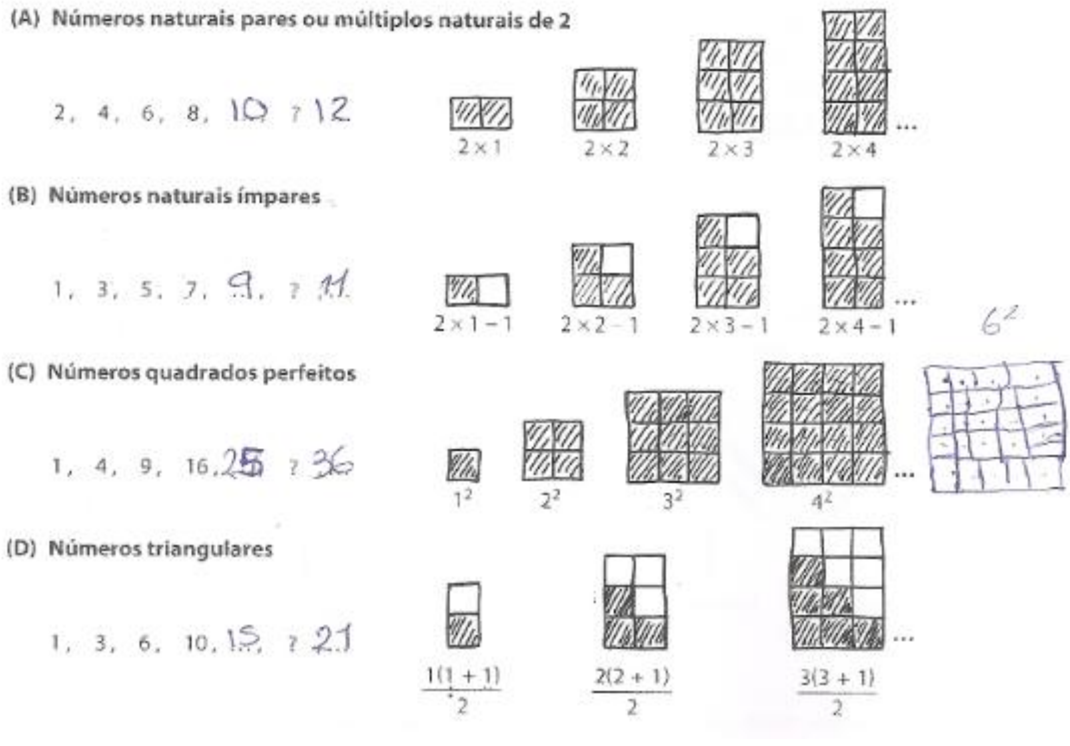
Na questão 3, todos os alunos, com excepção de apenas dois alunos do 5º ano, desenharam correctamente a construção dos lápis, recorrendo sobretudo a traços (por minha sugestão) para facilitar a representação.

Já a representação dos números triangulares, sob a forma de aviões da questão 4 foi a que registou mais respostas incorrectas. Apenas 7 dos 18 alunos de 5º ano responderam correctamente (cerca de 39% de respostas certas). Já no 6º ano, apenas três dos 12 alunos responderam correctamente (25% de respostas certas).

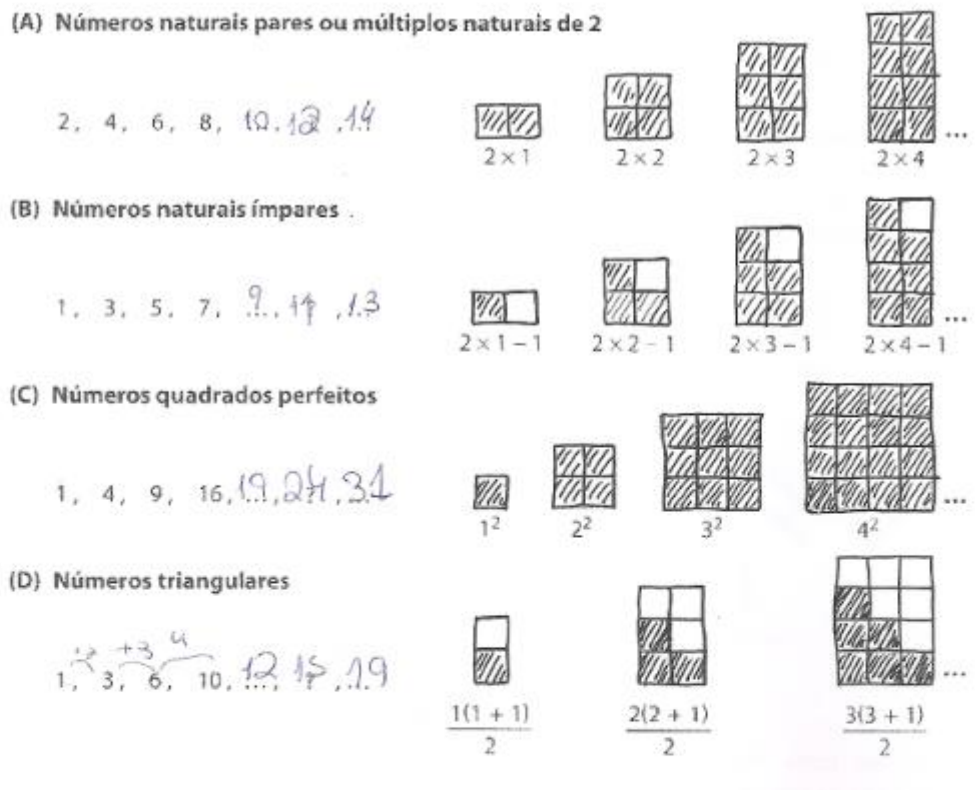
Na questão 5, dos 18 alunos do 5º ano, apenas 3 responderam correctamente a todas as alíneas (cerca de 17%). É de salientar a capacidade do aluno Alexandre, de conseguir utilizar um termo geral, que não nunca chegou a ser apresentado, nesta primeira resposta que se apresenta de seguida.



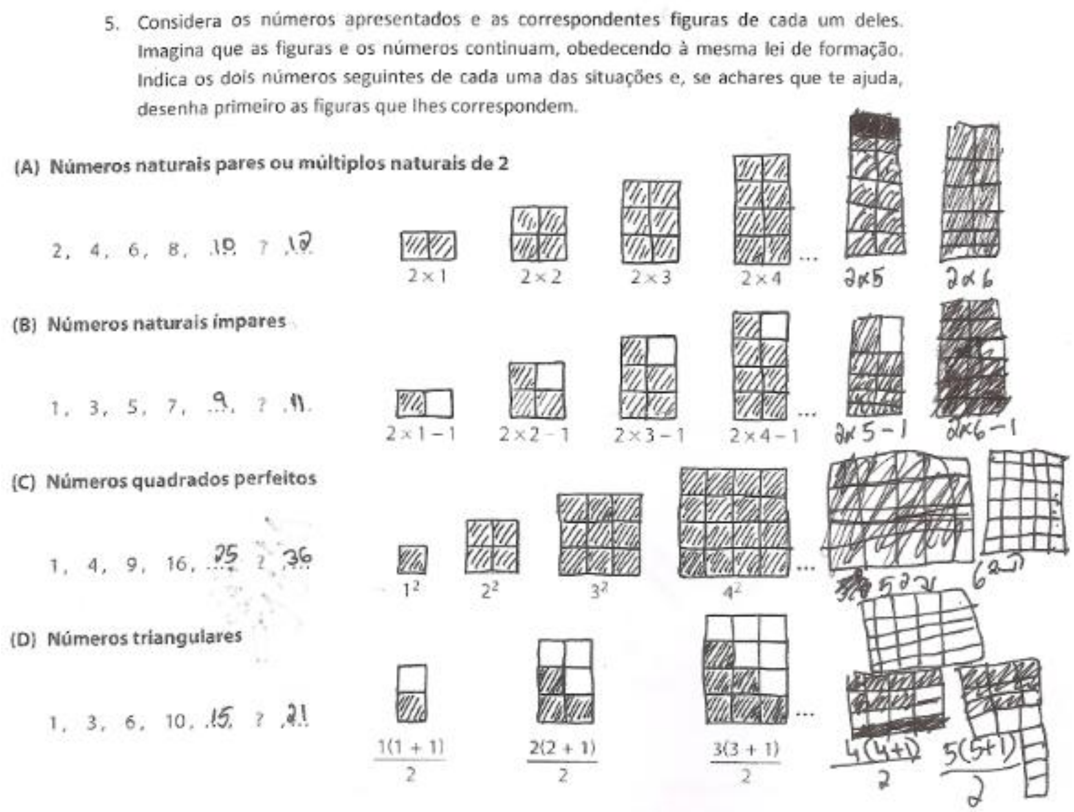
Nesta segunda resposta selecionada que se apresenta abaixo, a aluna apenas recorreu a um esquema na alínea (c) mas também respondeu correctamente a todas as alíneas.



Já esta aluna, apesar de ter errado as duas últimas alíneas, atente-se que deu correctamente início à lei de formação dos números triangulares, na alínea (d), mas não lhe chegou a dar continuidade.



Quanto ao 6º ano, o desempenho nesta questão foi mais elevado: 6 dos 12 alunos que participaram nesta actividade responderam correctamente a todas as alíneas, destacando-se que apenas 3 destes alunos recorreram à sequência de imagens apresentadas e lhes deram continuidade (porém, sem grande rigor…) e ainda ao “termo geral”, deduzido/ intuído pelos cálculos apresentados nos termos já dados.



5. Considera os números apresentados e as correspondentes figuras de cada um deles. Imagina que as figuras e os números continuam, obedecendo à mesma lei de formação. Indica os dois números seguintes de cada uma das situações e, se achares que te ajuda, desenha primeiro as figuras que lhes correspondem.

(A) Números naturais pares ou múltiplos naturais de 2

2, 4, 6, 8, 10 ? 12

2×1 2×2 2×3 2×4 … 2x5 2x6

(B) Números naturais ímpares

1, 3, 5, 7, 9, ? 11.

$2 \times 1 - 1$ $2 \times 2 - 1$ $2 \times 3 - 1$ $2 \times 4 - 1$ … 2x5 − 1 2x6 − 1

(C) Números quadrados perfeitos

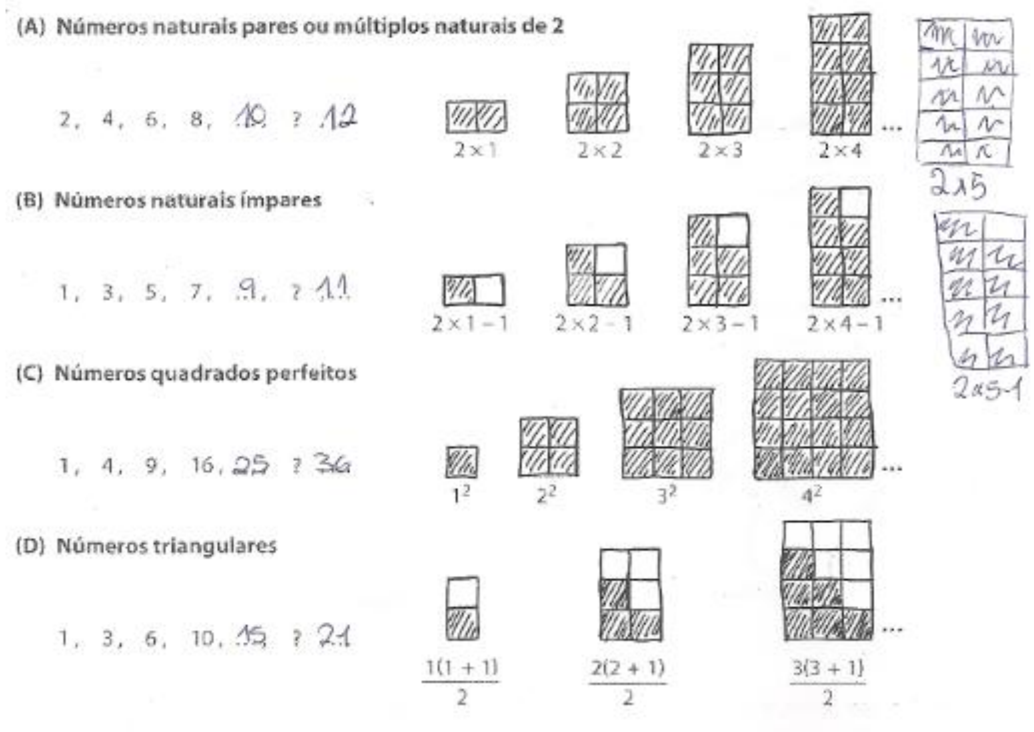
1, 4, 9, 16, 25 ? 36

1^2 2^2 3^2 4^2 … 5^2 6^2

(D) Números triangulares

1, 3, 6, 10, 15 ? 21

$\frac{1(1+1)}{2}$ $\frac{2(2+1)}{2}$ $\frac{3(3+1)}{2}$ … $\frac{4(4+1)}{2}$ $\frac{5(5+1)}{2}$



(A) Números naturais pares ou múltiplos naturais de 2

2, 4, 6, 8, 10 ? 12

2×1 2×2 2×3 2×4 … 2x5

(B) Números naturais ímpares

1, 3, 5, 7, 9, ? 11

$2 \times 1 - 1$ $2 \times 2 - 1$ $2 \times 3 - 1$ $2 \times 4 - 1$ … 2x5-1

(C) Números quadrados perfeitos

1, 4, 9, 16, 25 ? 36

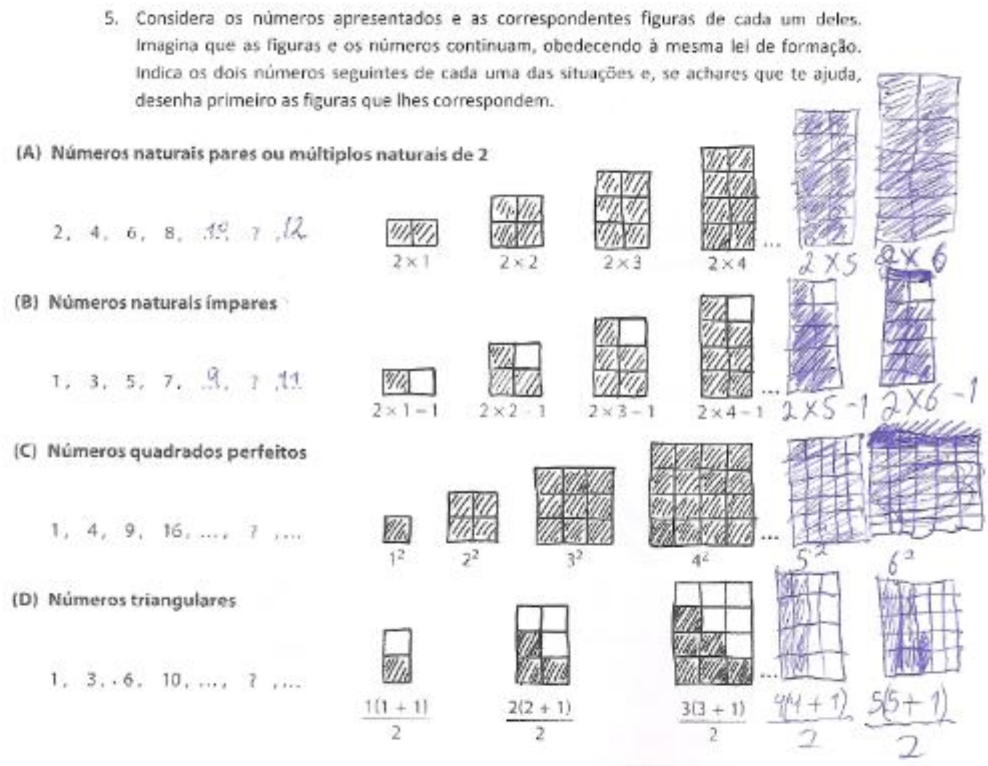
1^2 2^2 3^2 4^2 …

(D) Números triangulares

1, 3, 6, 10, 15 ? 21

$\frac{1(1+1)}{2}$ $\frac{2(2+1)}{2}$ $\frac{3(3+1)}{2}$ …

Já este último aluno, apesar de não ter preenchido todos os espaços em branco com os valores obtidos, conseguiu facilmente obter as representações e os cálculos correctos dos "termos gerais" das sucessões em questão:



É de fazer referência, mais uma vez, ao facto de estes alunos estarem sinalizados para o apoio escolar. Porém e atendendo ao facto de pertencerem ao 2º ciclo, revelaram alguma facilidade em lidar com estes conceitos do 3º ciclo e conseguiram autonomamente dar resposta a estas actividades retiradas maioritariamente de um manual de 8º ano de escolaridade.

Capítulo IV - Noções básicas e exemplos

IV.1 - Terminologia e notações

Dado um conjunto não vazio A, chama-se sucessão em A, a qualquer função definida no conjunto dos números reais e com valores em A. Se A é o conjunto IR dos números reais, a sucessão diz-se real.

Chamamos às imagens desta função os termos da sucessão e, aos objetos, definidos por um número natural n, a ordem desses termos.

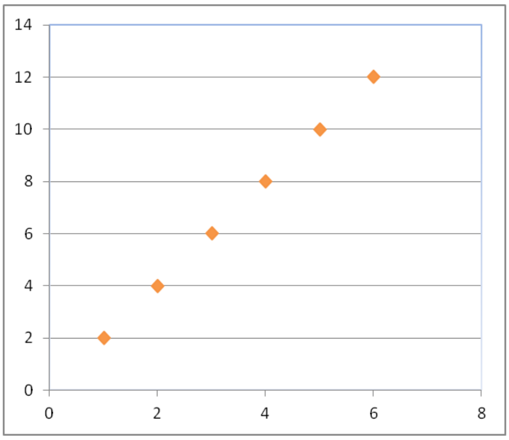
Pode representar-se uma sucessão por uma letra maiúscula $U : IN \to IR$ e os seus termos $U(1), U(2), \ldots, U(n), \ldots$ por letras minúsculas, sendo a ordem de cada termo indicada em índice, $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$

Por exemplo, u_7 é o 7º termo da sucessão U, ou seja, é a imagem do número 7, $U(7)$.

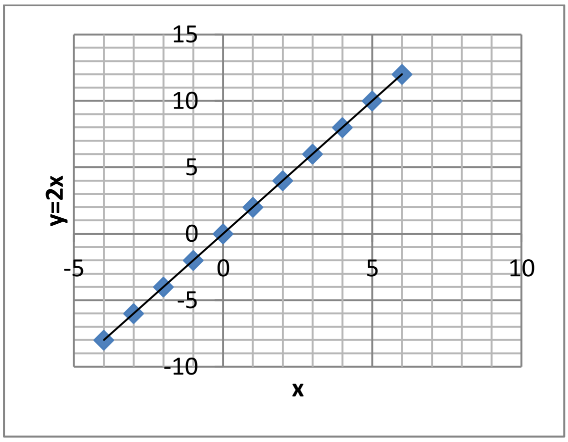
Em vez de usar a maiúscula U representativa da função, é habitual designá-la usando os símbolos $(u_n)_{n \in IN}$, (u_n) ou apenas o seu termo de ordem n, u_n, isto é, o termo geral da sucessão.

Exemplo: O termo geral da sucessão dos números pares é $u_n = U(n) = 2n$.

Graficamente esta sucessão é representada por uma infinidade de pontos isolados sobre a recta de equação $y = 2x$.



$u_n = 2n$



$y = 2x$

As coordenadas dos infinitos pontos isolados apresentados na representação gráfica da sucessão $u_n = 2n$, além de apenas gozarem de representação no primeiro quadrante, são apenas os da forma $(n, 2n)$, com $n \in \mathrm{N}$, enquanto que no gráfico $y = 2x$, temos todos os pontos de coordenadas $(x, 2x)$ com $x \in IR$.

Existem casos em que para conhecer os termos de uma sucessão se opta por um processo de recorrência, isto é, dar o primeiro termo da sucessão e uma regra que permita determinar um termo da sucessão a partir do termo anterior, como acontece com a sucessão definida por $v_1 = 1, v_{n+1} = 2^{v_n}$, cujos quatro primeiros termos são:

$v_1 = 1, v_2 = 2^1 = 2, v_3 = 2^2, v_4 = 2^{2^2} \ldots$

Mas há sucessões das quais não se conhece um termo geral e que não podem ser definidas por recorrência, como acontece com a sucessão dos números primos.

Para definir uma sucessão opta-se em várias situações por escrever ordenadamente alguns dos seus termos. Essa opção, quando não acompanhada de alguma caracterização adicional, é insuficiente, como se ilustra em seguida.

Será o número 333 um termo da sucessão 11, 22, 33, 44, 55, …?

A informação de que dispomos no enunciado é manifestamente insuficiente para dar resposta a esta questão! Será pois necessário indicar a regra que está subjacente à escrita da sequência de valores apresentada. Se cada termo da sucessão for obtido adicionando 11 ao termo anterior, então 333 não é termo da sequência. Mas, se interpretarmos a sequência como sendo formada pelos algarismos todos iguais, então 333 já é um termo desta sequência. Observando que, neste caso, a sucessão tem 9 termos com dois algarismos iguais, outros 9 termos com 3 algarismos iguais, rapidamente concluímos que 333 será o 12º termo dessa sequência. ($[9]$)

Uma sucessão (u_n) é **crescente**, em sentido estrito, se e só se, para todo o $n \in \mathbb{N}$ se tem: $u_{n+1} > u_n$, ou seja se $u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in IN$.

<u>Exemplo</u>: Verifiquemos que a sucessão (u_n) com termo geral $u_n = 3 \times 2^{n-1}$ é crescente. Portanto pretendemos provar que se verifica $u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in IN$. Temos:

$u_{n+1} - u_n = 3 \times 2^n - 3 \times 2^{n-1} = 3 \times 2^{n-1} \times 2 - 3 \times 2^{n-1} = 3 \times 2^{n-1} \times (2-1) = 3 \times 2^{n-1}$. Como $3 \times 2^{n-1} > 0, \forall n \in IN$ esta sucessão é crescente.

Uma sucessão (u_n) é **decrescente**, em sentido estrito, se e só se, para todo o $n \in \mathbb{N}$ se tem: $u_{n+1} < u_n$, ou seja, se $u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in IN$.

Exemplo: Verifiquemos que a sucessão (u_n) com temo geral $u_n = \frac{1-2n}{n}$ é decrescente.

Neste caso, pretendemos provar que se verifica a desigualdade $u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathrm{N}$. Temos portanto:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1-2(n+1)}{n+1} - \frac{1-2n}{n} = \frac{-2n-1}{n+1} - \frac{1-2n}{n} = \frac{-2n^2 - n - n - 1 + 2n^2 + 2n}{n(n+1)} =$$

$$= \frac{-1}{n(n+1)}.$$

Como $\frac{-1}{n(n+1)} < 0, \forall n \in \mathrm{N}$, concluímos que a sucessão é decrescente.

NOTA: Podemos ampliar as definições de sucessão crescente e sucessão decrescente, para o caso em que existam termos iguais. Assim, podemos ainda definir, **em sentido lato** que:

- Uma sucessão (u_n) é **crescente em sentido lato**, se e só se, $u_{n+1} \geq u_n, \forall n \in IN$.
- Uma sucessão (u_n) é **decrescente em sentido lato**, se e só se, $u_{n+1} \leq u_n, \forall n \in IN$.

Uma sucessão u é **monótona** se e só se a sucessão for crescente ou decrescente. Existem sucessões que não são monótonas, como as que têm termos alternadamente positivos e negativos, por exemplo,

a sucessão (u_n) definida por $u_n = \begin{cases} n-1 & , para \quad n\ par \\ -\frac{3}{n} & , para \quad n\ ímpar \end{cases}$.

Uma sucessão (u_n) diz-se **minorada** se o conjunto dos seus termos o for, isto é, se e só se $\exists\, m \in IR: \quad m \leq u_n, \forall n \in IN$. Podemos afirmar que se uma sucessão (u_n) for monótona crescente, o seu termo u_1 é o **minorante** do conjunto dos seus termos.

Uma sucessão (u_n) diz-se **majorada** se o conjunto dos seus termos o for, isto é, e só se $\exists\, M \in IR: \quad u_n \leq M, \forall n \in IN$. Podemos afirmar que se uma sucessão (u_n) for monótona decrescente, o seu termo u_1 é o **majorante** do conjunto dos seus termos.

Uma sucessão (u_n) é **limitada** se e só se for minorada e majorada, ou seja, se $\exists\, m, M \in IR: \quad m \leq u_n \leq M, \forall n \in IN$. Assim, dizemos que uma sucessão (u_n) é limitada se o conjunto dos seus termos o for.

Exemplo: Estudemos, quanto à limitação, a sucessão (u_n) definida por $u_n = \frac{n-4}{3n}$.

Determinemos os primeiros termos desta sucessão:

$u_1 = -1$; $u_2 = -\frac{1}{3}$; $u_3 = -\frac{1}{9}$ $\ldots$ Estes primeiros termos sugerem que a sucessão é crescente. Genericamente,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1-4}{3(n+1)} - \frac{n-4}{3n} = \frac{n-3}{3(n+1)} - \frac{n-4}{3n} = \frac{n^2-3n-n^2+3n+4}{3n(n+1)} = \frac{4}{3n(n+1)}.$$

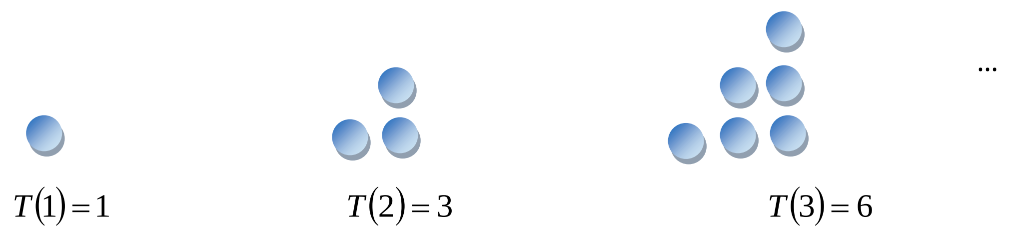
Como $\frac{4}{3n(n+1)} > 0$ para qualquer valor n natural, a sucessão (u_n) é monótona crescente. Portanto, podemos afirmar que o termo de ordem 1 é um minorante: $u_n \geq u_1$. Quanto ao majorante, esta sucessão pode ser escrita do seguinte modo:

$u_n = \frac{1}{3} - \frac{4}{3n}$ e portanto, $u_n < \frac{1}{3}$. Logo, podemos também afirmar que a sucessão (u_n) é majorada. Como (u_n) é majorada e minorada, podemos afirmar que é uma sucessão limitada e $-1 \leq u_n \leq \frac{1}{3}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. ([5], [7], [8], [16] e [18])

Números Poligonais

Debrucemo-nos agora sobre as **sucessões de números poligonais**, que, se acompanhadas das suas figurações geométricas podem tornar-se bastante intuitivas e elementares na obtenção dos seus termos.

Comecemos com os já introduzidos na atividade do capítulo anterior, a sucessão T dos **números triangulares**:

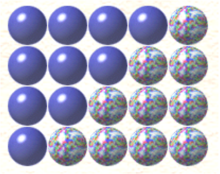


Tem-se

$T(2) = T(1) + 2 = 1 + 2$, $T(3) = T(2) + 3 = 1 + 2 + 3$, … ,
$T(n) = T(n-1) + n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$

Esta sucessão pode assim ser definida por recorrência pondo $\begin{cases} T(1) = 1 \\ T(n+1) = T(n) + (n+1) \end{cases}$ e através do seu termo geral $T(n) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$

Demonstra-se, por exemplo, usando o método de indução que $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, mas esse procedimento está claramente fora de uma abordagem elementar. No entanto, se atendermos à figuração dos números triangulares, verifica-se facilmente que $2\times T(n)=n(n+1)$. Para o efeito basta justapor duas representações de números triangulares como se ilustra na figura com o quarto termo da sucessão:



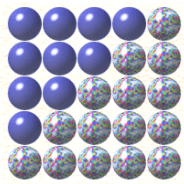
$2\times T(4)=4\times 5$

Verificámos assim que todo o número triangular é da forma $\frac{n(n+1)}{2}$.

Tirando mais uma vez partido da figuração geométrica dos números triangulares, podemos justificar que:

$T(n)+T(n+1)=(n+1)^2$.

Para o efeito basta justapor duas representações de números triangulares consecutivos como se ilustra na figura com o quarto e quinto termos da sucessão.



$T(4)+T(5)=5\times 5$

A relação $T(n)+T(n+1)=(n+1)^2$ permite dar outra definição por recorrência da sucessão dos números triangulares:

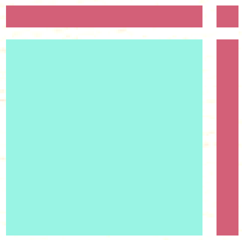
$$\begin{cases} T(1)=1 \\ T(n+1)=(n+1)^2-T(n) \end{cases}$$

Consideremos a sucessão dos **números quadrangulares** :

...

$Q(1)=1^2=1$ $Q(2)=2^2=4$ $Q(3)=3^2=9$ $Q(4)=4^2=16$

O termo geral da sucessão dos números quadrados é $Q(n)=n^2$. Porém, tirando partido da figuração geométrica, verificamos que para passarmos de $Q(n)$ para, $Q(n+1)$,isto é, de um quadrado com $n\times n$ bolas para um quadrado com $(n+1)\times(n+1)$ bolas é necessário acrescentar duas filas de n bolas de e mais uma bola no canto, conforme imagem que se segue:



$Q(n+1)=Q(n)+n+n+1$.

Esta relação permite definir a sucessão dos números quadrangulares por recorrência pondo

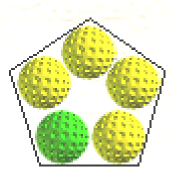
$$\begin{cases} Q(1)=1 \\ Q(n+1)=Q(n)+(2n+1) \end{cases}.$$

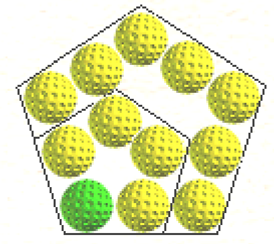
Mas, sendo $Q(n)=n^2$, tem-se

$$\begin{aligned}
&Q(1)=1 && =1^2\\
&Q(2)=Q(1)+3=1+3 && =2^2\\
&Q(3)=Q(2)+5=1+3+5 && =3^2\\
&Q(4)=Q(3)+7=1+3+5+7 && =4^2\\
&\dots\\
&Q(n)=Q(n-1)+(2n-1)=1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2
\end{aligned}$$

Verificou-se assim, recorrendo à figuração geométrica dos números quadrangulares, a igualdade $1+3+5+7+\ldots+(2n-1)=n^2$.

No que respeita aos **números pentagonais**, e como já vimos para os números triangulares e quadrangulares, o primeiro dos números pentagonais, $P(1)$ é também a unidade. O segundo número pentagonal será, analogamente aos números poligonais já vistos, o menor valor de bolas, com que podemos formar um pentágono, pelo que $P(2)=5$. Para construir $P(2)$ a partir de $P(1)$ acrescentámos 4 bolas. A partir do canto inferior esquerdo, vamos acrescentando bolas, de modo a formar um novo pentágono com 3 bolas em cada lado. Geometricamente:

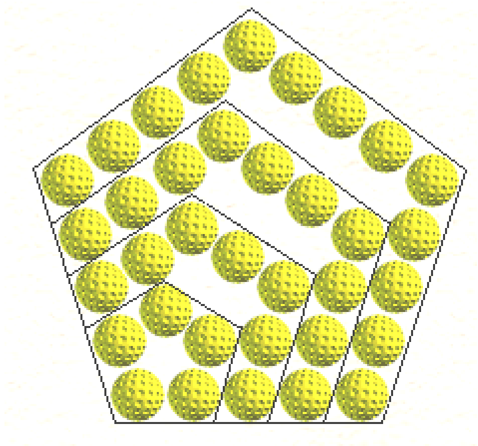




$P(1)=1$ $\qquad$ $P(2)=5$ $\qquad$ $P(3)=12$

Observando a imagem acima mais à direita, verificamos que $P(3)=P(2)+7$ e, desta vez, não é possível preencher os espaços interiores com uma distribuição regular de bolas.

Para passar do número pentagonal de ordem n, $P(n)$, ao seu sucessor, $P(n+1)$, é necessário acrescentar 3 lados com $n+1$ bolas, descontando as duas sobreposições nos vértices do pentágono, ou seja, $P(n+1)=P(n)+3(n+1)-2$, o que é equivalente a $P(n+1)=P(n)+3n+1$. A sucessão dos números pentagonais pode assim ser definida por recorrência, pondo $\begin{cases} P(1)=1 \\ P(n+1)=P(n)+(3n+1) \end{cases}$.



$$
\begin{aligned}
&P(1)=1 && =1\\
&P(2)=P(1)+4=1+4 && =5\\
&P(3)=P(2)+7=1+4+7 && =12\\
&P(4)=P(3)+10=1+4+7+10 && =22\\
&P(5)=P(4)+13=1+4+7+10+13 && =35\\
&\ldots\\
&P(n)=P(n-1)+(3n-2)
\end{aligned}
$$

pelo que o termo geral da sucessão dos números pentagonais é

$P(n)=1+4+7+10+\ldots+(3n-2)$.

Esta sucessão pode ser definida por recorrência, pondo $\begin{cases} P(1)=1 \\ P(n+1)=P(n)+(3n+1) \end{cases}$. ([21])

Progressões

As **progressões** constituem um tipo especial de sucessões definidas por recorrência em que cada termo se obtém do anterior por adição de uma parcela constante ou por multiplicação por um fator constante. Estas sucessões proporcionam desafios interessantes a explorar em diferentes níveis de ensino.

Uma sucessão diz-se **progressão aritmética** quando a diferença entre cada termo e o anterior é constante; essa constante chama-se **razão** da progressão. Simbolicamente, uma sucessão (u_n) é uma progressão aritmética se e só se $u_{n+1} - u_n = r, \forall n \in \mathbb{N}$. Numa progressão aritmética, obtém-se cada termo (com exceção do primeiro) somando a razão ao termo anterior.

Exemplos de progressões aritméticas:

- A sucessão dos números naturais é uma progressão aritmética de razão 1;
- A sucessão dos números pares ou e a sucessão dos números ímpares são progressões aritméticas de razão 2;
- A sucessão dos múltiplos de 5 é uma progressão aritmética de razão 5.

A razão r da progressão aritmética permite-nos afirmar o seguinte relativamente à monotonia:

- Se $r > 0$, a progressão aritmética é monótona crescente.
- Se $r < 0$, a progressão aritmética é monótona decrescente.
- Se $r = 0$, a progressão aritmética é constante.

Para obtermos o termo geral de uma progressão aritmética, basta considerarmos u_1 o seu primeiro termo e r a sua razão e, facilmente se vê que:

$$\left.\begin{array}{lll} u_2 - u_1 = r & \Leftrightarrow & u_2 = u_1 + r \\ u_3 - u_2 = r & \Leftrightarrow & u_3 = u_2 + r = u_1 + 2r \\ u_4 - u_3 = r & \Leftrightarrow & u_4 = u_3 + r = u_1 + 3r \\ & \dots & \end{array}\right\} \Rightarrow \quad u_n = u_1 + (n-1)\cdot r$$

Portanto, o termo geral de uma progressão aritmética é dado por $u_n = u_1 + (n-1)\cdot r \text{ , } \forall n \in IN$.

Exemplo de aplicação:

Um explorador de uma concessão de praia, tem de colocar 20 toldos em fila, ao longo da praia. O armazém onde se encontram os toldos está a 10 metros do local onde o primeiro toldo tem de ser colocado. Suponhamos que ele só transporta um toldo de cada vez, e que os toldos estão distanciados 5 metros entre si, encontrando-se cada toldo cinco metros mais distante do armazém do que o toldo anterior. Quantos metros percorrerá o homem para colocar todos os toldos?

Resolução:

Para colocar o toldo, o senhor desloca-se do armazém até ao primeiro local e regressa ao ponto de partida, fazendo um percurso de 20 metros, ou seja, 10m de ida e outros 10 m de regresso.

Para colocar o segundo toldo, ele andará (10+5+5+10) metros, ou seja, 30 metros e assim sucessivamente. Estes percursos podem ser considerados como os primeiros 20 termos de uma sucessão que, designando-a por (u_n), obtemos:

$$u_1 = 20 \quad ; \quad u_2 = 30 \quad ; \quad u_3 = 40 \quad ; \quad u_4 = 50 \quad ; \ldots ; u_{20} = 210$$

Repare-se que cada termo se obtém a partir do termo anterior adicionando-lhe 10 unidades, ou seja, $u_{n+1} = u_n + 10 \quad \Leftrightarrow \quad u_{n+1} - u_n = 10$. Por este motivo, dizemos que se trata de uma **progressão aritmética de razão 10**. Como $10 > 0$, estamos perante uma sucessão monótona crescente.

Podemos então determinar a distância total percorrida pelo banheiro, adicionando as distâncias correspondentes a cada percurso. Seja S_{20} a soma dos 20 primeiros termos de (u_n):

$$S_{20} = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{18} + u_{19} + u_{20}.$$

Ou seja, $S_{20} = 20 + 30 + 40 + \ldots + 190 + 200 + 210$.

Se observarmos atentamente a última expressão apresentada acima, verificamos que:

$$u_1 + u_{20} = 20 + 210 = 230$$
$$u_2 + u_{19} = 30 + 200 = 230$$
$$u_3 + u_{18} = 40 + 190 = 230$$
$$\ldots$$

E deste modo observamos que para determinar a soma dos 20 primeiros termos da progressão aritmética (u_n), corresponde a adicionar dez parcelas iguais a 230. Pelo que,

$$S_{20} = (20 + 210) \times \frac{20}{2} \qquad \text{ou seja} \qquad S_{20} = \frac{u_1 + u_{20}}{2} \times 20$$

Assim, podemos dar resposta à questão, calculando $S_{20} = (20+210)\times\frac{20}{2}$, o que dá 2300 metros percorridos na colocação dos 20 toldos.

Este exemplo sugere o caminho para a obtenção da expressão da **soma dos** n **primeiros termos de uma progressão aritmética.**

Observemos que

$$u_1 + u_n = u_1 + u_1 + (n-1)r = 2u_1 + (n-1)r$$
$$u_2 + u_{n-1} = u_1 + r + u_1 + (n-2)r = 2u_1 + (n-1)r = u_1 + u_n$$
$$u_3 + u_{n-2} = u_1 + 2r + u_1 + (n-3)r = 2u_1 + (n-1)r = u_1 + u_n$$
$$\ldots$$

Então:

- se n é par, $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = (u_1 + u_n)\frac{n}{2}$
- se n é ímpar e o termo médio é u_k tem-se $u_k = \frac{u_1 + u_n}{2}$ e

  $$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = (u_1 + \ldots u_{k-1} + u_{k+1} + \ldots + u_n) + u_k =$$
  $$= \frac{u_1 + u_n}{2}(n-1) + \frac{u_1 + u_n}{2} = \frac{u_1 + u_n}{2} n$$

Então $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n$.

Progressões Geométricas

Uma sucessão diz-se **progressão geométrica** quando o quociente entre cada termo e o anterior é constante; essa constante chama-se **razão** da progressão. Simbolicamente, uma sucessão (u_n) é uma progressão geométrica se e só se $u_{n+1} = r \times u_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Numa progressão geométrica, obtém-se cada termo (com excepção do primeiro) multiplicando pela razão o termo anterior.

Exemplos de progressões geométricas:

- Toda a sucessão com termo geral a^n , $a \neq 0$, é uma progressão geométrica: de facto, $\frac{a^{n+1}}{a^n} = a$, logo, a base da exponencial é a razão da progressão geométrica.

- Considerando uma folha de papel suficientemente grande com 0,2 mm de espessura e dobrando sucessivamente a folha de papel ao meio, temos que a sua espessura vai duplicando. A sucessão das espessuras tem uma característica especial: cada termo é o dobro do anterior e, portanto, o quociente entre cada termo e o anterior é constante e igual a 2. Então estamos perante uma progressão geométrica de razão 2.

A razão r da progressão geométrica permite-nos afirmar o seguinte relativamente à monotonia: A monotonia de uma progressão geométrica depende do sinal do primeiro termo e da razão. Generalizando, podemos afirmar que:

- Uma progressão geométrica (u_n) de razão positiva é sempre monótona, podendo ser crescente ou decrescente (em sentido estrito ou lato).
- Uma progressão geométrica de razão negativa nunca é monótona.

Resumindo,

- Se $r > 1$ e

  - $u_1 > 0$, a progressão geométrica é **monótona crescente**.

  - $u_1 < 0$, a progressão geométrica é **monótona decrescente**.

- Se $r = 1$, a progressão geométrica é **constante**.

- Se $0 < r < 1$ e

  - $u_1 > 0$, a progressão geométrica é **monótona decrescente**.

  - $u_1 < 0$, a progressão geométrica é **monótona crescente**.

- Se $r < 0$, a progressão geométrica é **não monótona.**

Para obtermos o termo geral de uma progressão geométrica, basta considerarmos u_1 o seu primeiro termo (com $u_1 \neq 0$) e r a sua razão. Em qualquer progressão geométrica temos:

$$\left.\begin{array}{l} u_2 = u_1 \times r \\ u_3 = u_2 \times r = u_1 \times r^2 \\ u_4 = u_3 \times r = u_1 \times r^3 \\ \qquad \cdots \end{array}\right\} \Rightarrow \quad u_n = u_1 \times r^{n-1}$$

Portanto, o termo geral de uma progressão geométrica é dado por $u_n = u_1 \times r^{n-1}, \forall n \in IN$.

<u>Exemplo de aplicação</u>:

"Segredos mal guardados"

Duas amigas descobrem um segredo ultra-secreto de uma outra amiga que lhes pediu que não contassem a ninguém. No entanto… cada uma delas, 20 minutos depois, contou a 3 pessoas de "toda a confiança", cada uma das quais, 20 minutos depois, contou a outras 3 pessoas. Se o processo continuar assim, ao fim de 5 horas, quantas pessoas já sabem o segredo?

Resolução:

Partimos de 2 pessoas que sabem o segredo, pelo que tomamos $u_1 = 2$. Para calcular quantas pessoas já sabem o segredo ao fim de 5 horas é preciso somar todas as que o foram sabendo ao fim de cada período de 20 minutos.

$u_2 = 2\times 3$ - Número de pessoas a quem é contado o segredo ao fim dos primeiros 20 minutos;

$u_3 = 2\times 3^2$ - Número de pessoas a quem é contado o segredo durante o 2º período de 20 minutos;

$u_4 = 2\times 3^3$ - Número de pessoas a quem é contado o segredo durante 3º período de 20 minutos;

…

$u_{n+1} = 2\times 3^{n-1}$ - Número de pessoas a quem é contado o segredo durante o n-ésimo período de 20 minutos.

Como em 5 horas há 15 períodos de 20 minutos, no final da 5ª hora, há mais $u_{16} = 2\times 3^{15}$ pessoas que ficam a conhecer o segredo do que nos 20 minutos anteriores.

Ao todo, quantas pessoas já ouviram o segredo nesse período de tempo? Ouviram o segredo $2+2\times 3+2\times 3^2+2\times 3^3+\ldots+2\times 3^{14}+2\times 3^{15}$ pessoas.

Designemos por S essa soma e calculemos $S-3\times S$:

$S-3\times S = \left(2+2\times 3+2\times 3^2+\ldots+2\times 3^{14}+2\times 3^{15}\right)-3\times\left(2+2\times 3+\ldots+2\times 3^{14}+2\times 3^{15}\right)$

temos que $S-3\times S = 2+0+0+\ldots+0-2\times 3^{16}$

Então $S\times(1-3) = 2-2\times 3^{16}$, ou seja, $S = \dfrac{2-2\times 3^{16}}{1-3} = 3^{16}-1 = 43046720$, número que ultrapassa o quadruplo da população de Portugal !

Observemos que os termos da sucessão $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ estão em progressão geométrica de razão igual a 3. Genericamente, se $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n, \ldots$ é uma progressão geométrica de razão r, $r \neq 1$, isto é, $v_2 = v_1 \times r, \ldots, v_n = v_{n-1} \times r = v_1 \times r^{n-1}, \ldots$ verifica-se, por um processo análogo ao utilizado neste caso particular, que

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n = v_1 \times \left(1 + r + \ldots + r^{n-1}\right) = v_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

NOTAS:

(1) v_1 não é necessariamente o primeiro termo da sucessão, mas sim o primeiro termo que se pretende somar.

(2) A fórmula anterior não pode ser aplicada quando $r = 1$. Nesse caso todos os termos são iguais ao primeiro, e portanto, $v_1 + v_2 + \ldots + v_n = n \cdot v_1$.

([7], [8], [16] e [19])

IV.2 - Exploração da noção de limite

É impossível utilizar a expressão *limite*, sem nos referirmos à expressão *infinito*.

O que é infinito? Para chegar ao conceito podemos pensar na possibilidade de acrescentar sucessivamente uma unidade na contagem de números, tornando infindável este processo. Infinito surge assim associado a uma quantidade que não termina, etimologicamente, a palavra “infinito” significa “não acabado”.

Explícita ou implicitamente, a ciência actual precisa de usar o infinito para o seu desenvolvimento, qualquer que seja o seu ramo.

Começamos por analisar alguns exemplos envolvendo a ideia de infinito.

<u>Hotel Infinito</u>

Um dos requisitos para se ser rececionista no Hotel Infinito é ter um conhecimento sólido sobre o infinito. Paulo candidatou-se, foi entrevistado e começou a trabalhar na noite seguinte. Estava intrigado sobre o motivo pelo qual a gerência do hotel requeria que todos os seus empregados tivessem conhecimentos sobre o infinito, sobre conjuntos infinitos e sobre conjuntos transfinitos. Calculou que, dado que o hotel tinha um número infinito de quartos, não haveria qualquer problema em arranjar quarto para os novos hóspedes. Depois da sua primeira noite de serviço, sentiu-se contente por ter tais conhecimentos.

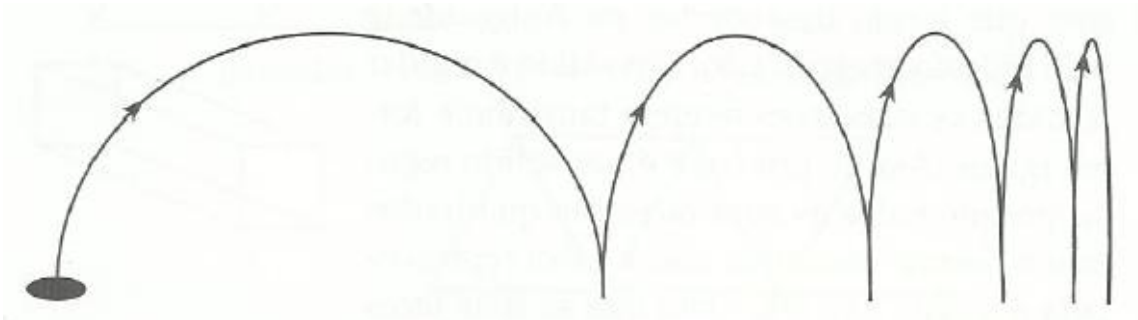
Quando Paulo substituiu a rececionista do turno de dia, ela informou-o de que havia um número infinito de quartos ocupados. Assim que ela saiu, chegou um novo hóspede que tinha feito uma reserva e Paulo teve que decidir qual o quarto que lhe havia de dar. Pensou durante alguns momentos e depois decidiu transferir cada hóspede para o quarto seguinte ao do que ocupava, sendo assim possível tornar vago o quarto número 1. Paulo ficou contente com esta decisão, mas nesse instante chegou um autocarro infinito, com um número infinito de novos hóspedes. Como arranjar quarto para todos, agora?! …

Possível resposta: O Paulo resolveu deslocar cada hóspede para o quarto cujo número fosse o dobro do número do quarto ocupado anteriormente, portanto o hóspede do quarto 1 foi para o quarto 2, o do quarto 2 foi para o quarto 4, o do quarto 3, foi para o quarto 6 e assim sucessivamente. Deste modo, ficaram vagos todos os quartos ímpares para os infinitos hóspedes acabados de chegar.

História das Pulgas

Duas pulgas amigas conversam sobre as distâncias que conseguem atingir com os seus saltos. Uma delas pretende deslocar-se de um lado de uma sala para o outro. A outra pulga faz uma aposta com ela dizendo que esta nunca atingirá o outro lado da sala se der apenas saltos que cubram metade da distância a percorrer. Ao que ela aceita a aposta e diz que não terá qualquer dificuldade em ganhá-la! Qual das pulgas tem razão?

Possível resposta: O seu primeiro salto leva-a até metade da sala, o segundo cobre metade da distância restante, o terceiro salto, metade da distância que falta percorrer, e assim sucessivamente.



Embora se encontre muito mais perto da outra extremidade da sala, tem de manter a promessa, segundo a qual, cada salto só pode cobrir metade da distância restante e de que só poderá saltar metade dessa distância. E, a não ser que desista, a pulga continuará eternamente a saltar.

Associada ao Hotel Infinito está a sucessão (u_n) definida por $u_1 = 1$ e $u_{n+1} = 2u_n$ e à História das Pulgas a sucessão (v_n) definida por $v_1 = a$ (em que a é o comprimento da sala) e $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{2}$. São ambas progressões geométricas com razões 2 e $\dfrac{1}{2}$ respetivamente, pelo que $u_n = 2^{n-1}$ e $v_n = \dfrac{a}{2^{n-1}}$.

Relativamente à sucessão (u_n), dado qualquer número positivo L existe uma ordem a partir da qual se tem $2^{n-1} > L$: basta tomar $n > 1 + log_2 L$. No caso de (v_n), dado qualquer número positivo δ (por menor que ele seja) existe uma ordem a partir da qual se tem $\frac{a}{2^{n-1}} < \delta$: basta tomar $n > 1 + log_2 \frac{a}{\delta}$. Assim, a sucessão (u_n) é um **infinitamente grande** positivo e a sucessão (v_n) é um infinitésimo.

- Uma sucessão (a_n) é um **infinitamente grande positivo** quando, para todo o número positivo L, existe uma ordem p, a partir da qual se tem $a_n > L$. Diz-se neste caso que o limite da sucessão é mais infinito e escreve-se $\lim a_n = +\infty$.
- Uma sucessão (a_n)é um **infinitamente grande negativo** quando a sucessão $(-a_n)$for um infinitamente grande positivo. Diz-se neste caso que o limite da sucessão é menos infinito e escreve-se $\lim a_n = -\infty$.
- Uma sucessão (a_n)é um **infinitamente grande em módulo** quando a sucessão $(|a_n|)$é um infinitamente grande positivo.
- Uma sucessão (a_n)é um **infinitamente grande sem sinal determinado** quando for um infinitamente grande em módulo mas não for infinitamente grande negativo nem positivo. Diz-se neste caso que o limite da sucessão é infinito e escreve-se $\lim a_n = \infty$.
- Uma sucessão (b_n) é um **infinitésimo ou tem limite zero** quando, para todo o número positivo δ, existe uma ordem *p*, a partir da qual se tem $|b_n| < \delta$.
- Uma sucessão (c_n) é **convergente** para d ou tem limite d, com $d \in IR$, se e só se $c_n - d$ é um **infinitésimo**, isto é, uma sucessão (c_n) é convergente para d se $\forall \delta > 0$, existe uma ordem a partir da qual se tem $|u_n - a| < \delta$. Esta condição é equivalente a $-\delta < c_n - d < \delta \quad \Leftrightarrow \quad d - \delta < c_n < d + \delta$. ([18])

<u>Exemplo:</u>

Provar que a sucessão definida por $u_n = \frac{2n+3}{n}$ é convergente para 2 e determinar a menor ordem a partir da qual os termos da sucessão são valores aproximados de 2 com erro inferior a uma milésima.

<u>Resolução:</u>

Vejamos primeiro que a sucessão dada é convergente para 2.

$u_n - 2 = \frac{2n+3}{n} - 2 \quad = \quad \frac{2n+3-2n}{n} = \frac{3}{n}$. Ora, $\frac{3}{n}$ é um infinitésimo, logo tende para zero e portanto a sucessão dada converge para 2.

Vejamos agora quando é que u_n é um valor aproximado de 2 com erro inferior a uma milésima. Isto acontece quando se verifica a seguinte condição:

$|u_n - 2| < 0{,}001 \Leftrightarrow \left|\frac{3}{n}\right| < 0{,}001 \Leftrightarrow \frac{3}{n} < 0{,}001 \quad \Leftrightarrow n > \frac{3}{0{,}001} \Leftrightarrow n > 3000$. Portanto, os termos desta sucessão de ordem superior a 3000 já são valores aproximados de 2 com erro inferior a 0,001.

Contagem de pontos

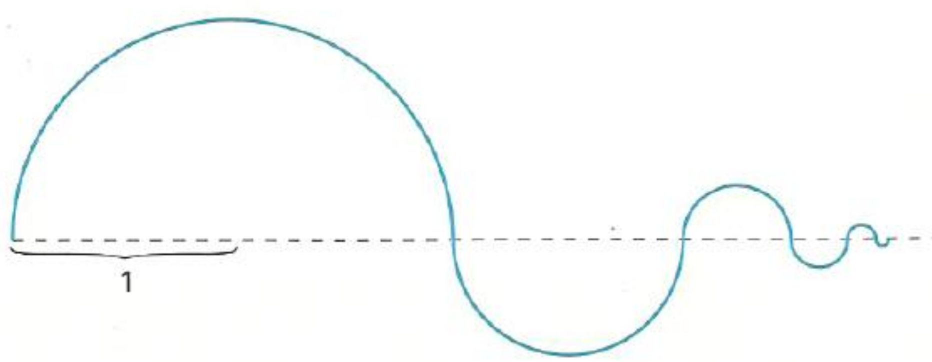
Muitas pessoas imaginam que uma quantidade infinita deve ocupar um espaço muito grande, mas num pequeno e qualquer segmento de recta existe um número infinito de pontos.

Para o demonstrar, recorremos à ideia de que entre quaisquer dois pontos de um segmento de recta é sempre possível existir outro: se os pontos A e B pertencem ao segmento, então o ponto médio do segmento de recta que eles definem é um ponto C entre ambos. Obviamente entre o ponto A e C existirá também um, o mesmo sucedendo entre o ponto C e B. Este processo de determinação de um ponto situado entre quaisquer outros dois prolonga-se indefinidamente e, por isso, existe um número infinito de pontos em qualquer segmento de recta.

Assim, embora o infinito seja uma quantidade que não termina e que não pode ser identificada com nenhum número real, pode surgir associada, tanto a conjuntos limitados, como a conjuntos ilimitados.([4], [5] e [7])

Perímetro, área e somas infinitas

1. A imagem seguinte é formada por uma sucessão de semicircunferências em que o raio de cada arco é metade do anterior. Qual a área da região compreendida entre os arcos da figura e a linha a tracejado?



As medidas das áreas estão em progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$ e a medida da área do primeiro semicírculo é $\frac{\pi}{2}$. Assim a área A pedida é a soma infinita dos termos desta progressão.

No caso geral, se (u_n) é uma progressão geométrica com razão r, tem-se que

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = lim(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)$$

e sendo $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_1 \cdot \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $r \neq 1$,tem-se

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \lim\left(u_1 \frac{1-r^{n+1}}{1-r}\right)$$

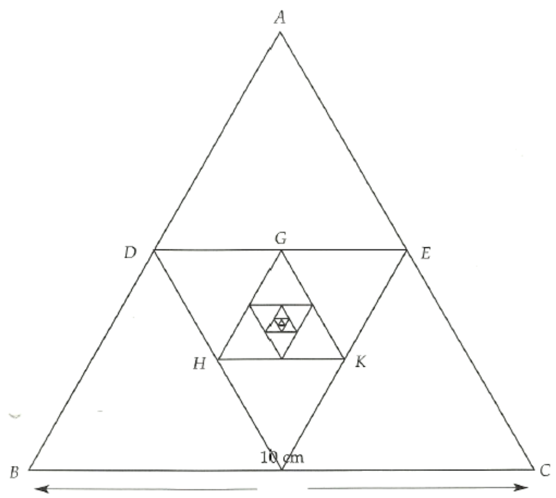
Se a razão r da progressão for em módulo inferior a 1, r^n é um infinitésimo, pelo que

$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \frac{u_1}{1-r}$. (A soma infinita dos termos de uma progressão geométrica de razão r é uma série geométrica de razão r.)

Para determinar a área pretendida, basta tomar $u_1 = \frac{\pi}{2}$ e $r = \frac{1}{4}$, obtendo-se

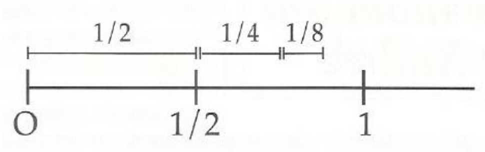
$$A = \frac{\frac{\pi}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2\pi}{3}.$$

2. A figura seguinte representa uma sucessão de triângulos, em que cada um dos triângulos inscritos é definido pelos pontos médios dos lados do triângulo que o circunscreve. Qual a soma dos perímetros da sucessão de triângulos? Qual a soma das áreas da sucessão de triângulos?



Para determinar a soma dos perímetros destes triângulos é necessário calcular uma soma infinita: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\ldots$

Através da recta numérica, verificamos que esta soma não excede 1.



Observe-se que as parcelas desta soma infinita constituem uma progressão geométrica com primeiro termo $\frac{1}{2}$ e razão $\frac{1}{2}$, pelo que

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

O conhecimento desta soma conduz ao cálculo da soma dos perímetros. Com efeito, há um teorema na geometria que nos garante que *o segmento que une dois pontos médios de dois lados de um triângulo tem metade do comprimento do lado oposto.* Listemos então os perímetros dos triângulos: $30\,,15\,,\frac{15}{2}\,,\frac{15}{4}\,,\frac{15}{8}\,,\frac{15}{16}\,,\frac{15}{32}\,,\frac{15}{64}\,,\frac{15}{128}\,,\ldots$

O termo geral desta sucessão dos perímetros pode ser definido da seguinte forma, tomando para o lado do triângulo equilátero os 10 centímetros apresentados na imagem acima:

$$P_n=30\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

De seguida, podemos adicionar todos estes termos para determinar a soma dos perímetros dos triângulos:

$$30+15+\frac{15}{2}+\frac{15}{4}+\frac{15}{8}+\frac{15}{16}+\frac{15}{32}+\frac{15}{64}+\frac{15}{128}+\ldots$$

Simplificando, obtemos: $45+15\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\ldots\right)$. Como vimos que $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\ldots=1$, a soma dos perímetros é igual a 60.

Para a determinação da soma das áreas dos triângulos e sendo o termo geral da sucessão das áreas dado por $A_n = 25\sqrt{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$, pelo que a soma das áreas é

$$25\sqrt{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^{n-1}}+\ldots\right)=25\sqrt{3}\,\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\ .$$

Números naturais e dízimas infinitas periódicas

Vamos provar que qualquer número natural pode ser escrito como uma dízima infinita periódica, de período 9.

Consideremos a seguinte sucessão:

$$u_1 = k+\frac{9}{10}$$
$$u_2 = k+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}$$
$$u_3 = k+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}$$
$$\ldots$$
$$u_n = k+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\ldots+\frac{9}{10^n}$$

Queremos provar que $lim\ u_n = k+1$.

Temos que:

$$k{,}9999(9)=k+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\ldots\quad=\quad k+\frac{9}{10}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\ldots\right)$$

Mas $1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\ldots$ é a soma dos termos de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{10}$, e primeiro termo igual a 1.

Então, $1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=\frac{10}{9}$, pelo que

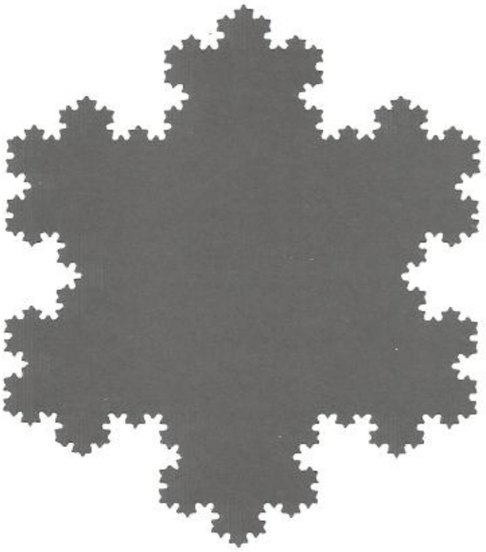
$$k{,}9999(9)=k+\frac{9}{10}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\ldots\right)=k+\frac{9}{10}\times\frac{10}{9}=k+1.$$

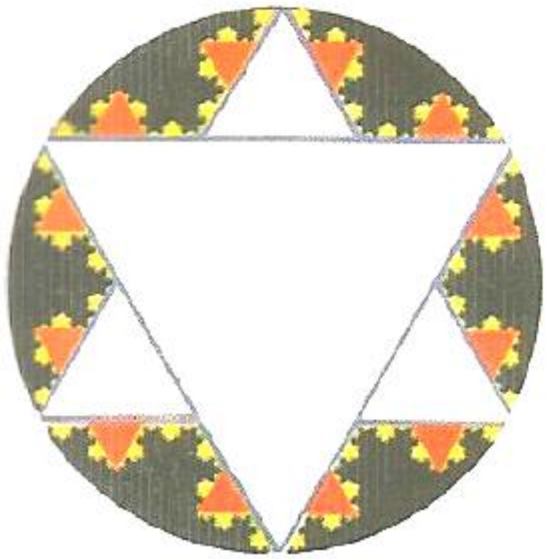
NOTA:

Observe-se que tomando, por exemplo $x=2{,}9999\ldots$ tem-se $10x=29{,}9999\ldots$. Então $10x-x=27{,}0000\ldots$ e assim $x=3$, sem recorrer a sucessões!

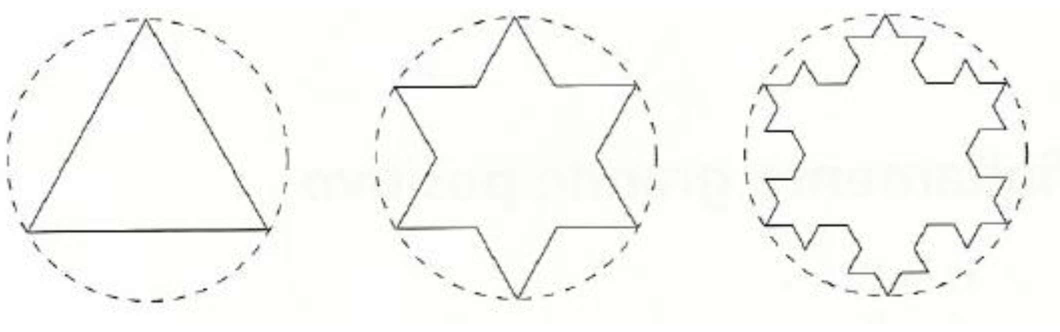
<u>Nem tudo o que cresce é um infinitamente grande positivo, nem tudo o que é um infinitésimo decresce</u>

A **curva do floco de neve** tem este nome devido à forma semelhante que os flocos de neve assumem quando se formam. O floco de neve foi referido pela 1ª vez em 1904 pelo matemático sueco Helge Von Kock como exemplo de uma curva de comprimento infinito, que abrange uma área finita. Hoje classifica-se como um "fractal".



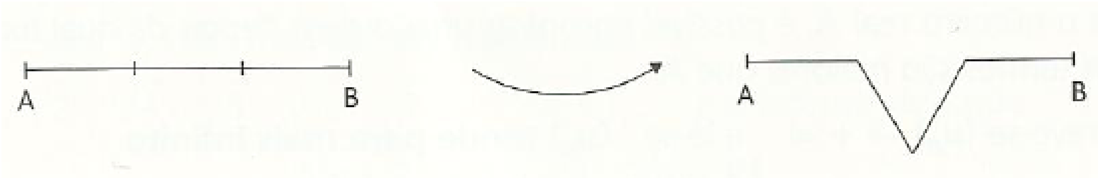


Para gerar uma destas curvas, observemos a sequência de figuras obtidas a partir de um triângulo equilátero, em que dividindo cada lado do triângulo em três partes iguais, se desenha na parte central de cada segmento um novo triângulo equilátero, eliminando a base, que pertencia ao segmento anterior, antes de ser divido em três partes iguais.



1º Termo 2º Termo 3º Termo …

Saliente-se a forma como cada lado se transforma quando se pretende obter o termo seguinte desta sucessão:



Continuando este procedimento sucessivamente em todos os lados, verificamos rapidamente que o perímetro cresce indefinidamente, sem limite. A sucessão (P_n) dos perímetros das figuras, sendo uma sucessão monótona crescente e ilimitada, é um **infinitamente grande positivo**. Já a sucessão (A_n) das áreas das figuras é monótona crescente, mas não é um infinitamente grande positivo, visto que a área das figuras nunca ultrapassa, por exemplo, a área do círculo onde as figuras se inscrevem.

Nem sempre um infinitésimo é decrescente! ($[8]$)

Exemplo:

Consideremos a seguinte sucessão $U\ : n \mapsto -\frac{10}{n}$. Esta sucessão é crescente e tende para zero. De facto, os primeiros termos são: $-10\,;-5\,;-3{,}33\,;-2{,}5\,;\ldots$que sugerem, que a sucessão é crescente, mas não basta analisar o comportamento de um número finito de termos. Há que verificar que $u_{n+1}-u_n \geq 0,\ \forall n \in IN$:

$$u_{n+1}-u_n = \ -\frac{10}{n+1}-\left(-\frac{10}{n}\right)=-\frac{10}{n+1}+\frac{10}{n}=\frac{-10n}{n(n+1)}+\frac{10n+10}{n(n+1)}=\frac{10}{n(n+1)}\geq 0,\ \forall n \in IN.$$

Por outro lado, $u_{100}=-0{,}1$, $u_{10000}=-0{,}001\ldots$e nota-se que os termos se aproximam de zero e o seu valor absoluto torna-se inferior a qualquer número positivo. Com efeito, dado um qualquer número $\delta > 0$ existe uma ordem a partir da qual se tem $\left|-\frac{10}{n}\right| < \delta \Leftrightarrow \frac{10}{n} < \delta \Leftrightarrow n > \frac{10}{\delta}$. Ou seja, os termos desta sucessão são, em módulo, inferiores a δ, desde que a ordem dos termos seja superior a $\frac{10}{\delta}$. Portanto, a sucessão (u_n) dada é um infinitésimo.

Uma sucessão que não é convergente diz-se **divergente**. (Os **infinitamente grandes são sucessões divergentes**.)

Faz-se referência em seguida a importantes resultados que estabelecem relações entre os conceitos de sucessão limitada, sucessão monótona e sucessão convergente.

- Uma sucessão **convergente** é sempre **limitada**.

- Uma sucessão **monótona e limitada** é sempre **convergente**.

Mas,

- Uma sucessão monótona pode não ser convergente. Exemplos: $n^2; -3n; \sqrt{n}; \ldots$ (são monótonas e não são convergentes.)
- Uma sucessão limitada pode não ser convergente. Exemplo: $(-1)^n + 2$ (é limitada e não é convergente.)
- Uma sucessão convergente pode não ser monótona. Exemplo: $2+\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ (é convergente e não é monótona.)

Mas tem-se

<u>Teorema das sucessões monótonas</u>

Toda a sucessão monótona tem limite, que é finito ou infinito consoante ela seja limitada ou não. Se a sucessão é monótona e não limitada, o limite é $+\infty$ se ela é crescente e $-\infty$ se ela é decrescente.

Trata-se de um resultado muito intuitivo como é patente na demonstração seguinte.

Comecemos por analisar o caso em que uma sucessão u_n é crescente e limitada por um número L. Se u_n é formada apenas por números positivos, a sucessão formada pelas partes inteiras dos termos da sucessão não pode crescer indefinidamente, estabilizando-se a partir de certa ordem (porque todos os termos da sucessão são menores do que L). Quanto à parte não inteira, todos os algarismos se vão estabilizando (primeiro o das décimas, depois o das centésimas, e assim sucessivamente), já que não podem exceder 9. O número formado pela parte inteira estabilizada e pelos algarismos estabilizados é o limite da sucessão.

Para sucessões decrescentes e limitadas a demonstração é perfeitamente análoga.

Se u_n é crescente e não limitada, dado qualquer número positivo K existe um termo da sucessão, digamos u_j, tal que $u_j > K$ e, como a sucessão é crescente, todos os termos da sucessão são, a partir da ordem j, maiores do que K. Então, a sucessão tem limite + ∞.

A demonstração é análoga no caso de uma sucessão decrescente e não limitada. ([18])

IV.3 - Aplicações

A definição dos números especiais que constam deste parágrafo à custa de sucessões torna-os particularmente adequados para integrar a leccionação deste tópico. A sua utilização, desde que devidamente contextualizada, pode proporcionar explorações dirigidas a diferentes níveis de escolaridade.

IV.3.1 - O número π

O número pi, representado habitualmente pela letra grega π é provavelmente o número irracional mais famoso da história, que representa a razão constante entre o perímetro de qualquer circunferência e o seu diâmetro.

Como irracional, este número é expresso por uma dízima infinita não periódica. Nos dias de hoje, graças à ajuda dos computadores, já é possível determinar aproximações com centenas de milhões de casas decimais.

Apresentam-se, de seguida, as primeiras cinquenta:

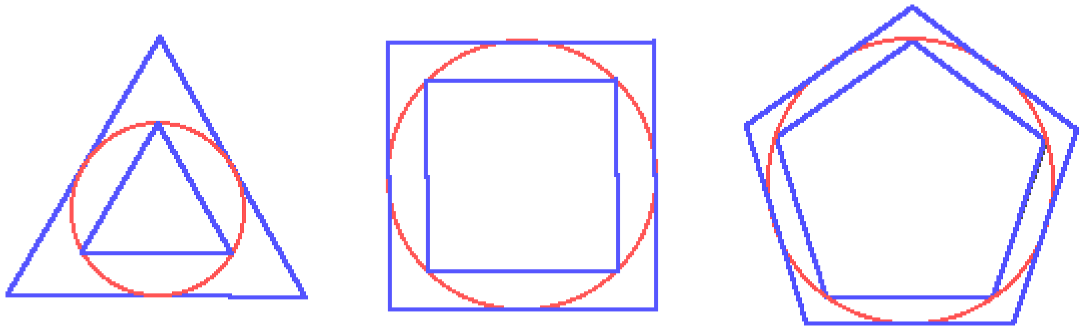
π = 3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 3751

O método de Arquimedes (287a.C. – 212a.C.) surge como o primeiro método para calcular um valor aproximado do número π com alguma precisão.

Arquimedes em Siracusa.

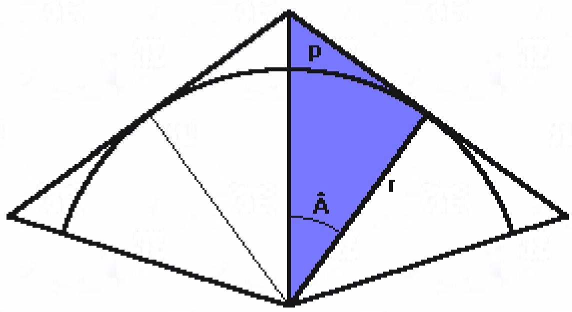
Arquimedes inscreveu e circunscreveu polígonos regulares com n lados e, à medida que aumenta o número de lados, tanto o polígono inscrito, como o polígono circunscrito vão-se assemelhando à circunferência e, consequentemente, os seus perímetros também se vão aproximando. Calculou assim o comprimento de uma circunferência e, consequentemente, um valor aproximado para π. O número π é o limite da sucessão crescente formada pelos perímetros dos polígonos inscritos e o limite da sucessão decrescente formada pelos perímetros dos polígonos circunscritos. ([1])

Vejamos as figuras seguintes e imaginemos continuar indefinidamente este processo.



À medida que Arquimedes aumentou progressivamente o número de lados, mais próximo ficou do valor de π. Vejamos a que valores conseguiu chegar, seguindo este processo:

Consideremos um polígono regular com n lados, circunscrito a uma circunferência de raio r. De seguida, tracemos os segmentos de recta que unem o centro da circunferência aos vértices do polígono. Deste modo, vamos obter n triângulos congruentes. Analisando a sua construção, verificamos facilmente que estes triângulos são isósceles, visto que dois dos seus lados são exactamente o raio da circunferência. Depois, traçamos os segmentos de recta desde o centro até ao ponto de tangência da circunferência com cada lado do polígono (ponto médio de cada lado do polígono). Estes segmentos são perpendiculares a cada lado do polígono e são também, portanto, as alturas dos n triângulos isósceles em que o polígono foi dividido. Estes triângulos são também iguais entre si, e, qualquer um destes segmentos de recta, define-se no polígono como o seu apótema. Obtivemos então um polígono regular constituído por $2n$ triângulos rectângulos congruentes, assim como se pode observar na figura seguinte:



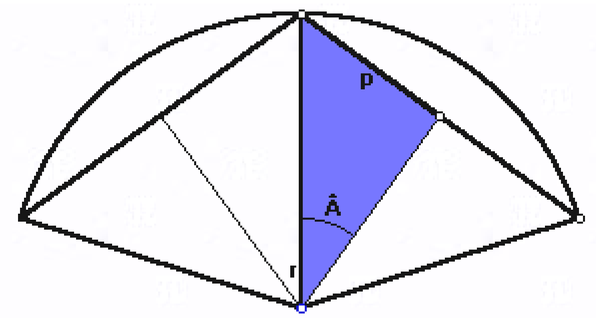
Portanto, podemos afirmar que o ângulo de amplitude Â mede exactamente, $\frac{360°}{2n}$. Cada um destes $2n$ triângulos rectângulos tem um cateto de comprimento igual ao raio da circunferência (r) e outro cateto de comprimento igual a metade do comprimento do lado do polígono (p). Logo, podemos definir o valor do perímetro do polígono circunscrito por $2n \times p$.

Considerando agora o triângulo sombreado a azul, temos que $tg\ \hat{A} = \frac{p}{r} \Leftrightarrow tg\left(\frac{360°}{2n}\right) = \frac{p}{r} \Leftrightarrow p = r \cdot tg\left(\frac{360°}{2n}\right)$. Retomando o perímetro do polígono circunscrito (dado por $2n \times p$) podemos reescrevê-lo do seguinte modo: $2n \times r \cdot tg\left(\frac{360°}{2n}\right)$. Sabendo ainda que o perímetro da circunferência é dado por $2\pi r$ e que este perímetro é inferior ao do seu polígono circunscrito, obtemos a seguinte desigualdade:

$$2\pi r < 2nr\,tg\left(\frac{360°}{2n}\right) \Leftrightarrow \pi < n\,tg\left(\frac{360°}{2n}\right). \qquad \textbf{(*)}$$

No caso particular de $n = 6$, temos um hexágono regular e, substituindo na fórmula acima obtida, vem $\pi < 6 \cdot tg(30°) = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2 \cdot \sqrt{3} \cong 3{,}4641$. Portanto, $\pi < 3{,}4641$.

Analogamente, se considerarmos agora um polígono com n lados inscrito numa circunferência, e se de seguida, traçarmos os segmentos de recta que unem o centro da circunferência aos vértices do polígono, assim como os segmentos que unem o centro da circunferência ao ponto médio de cada lado do polígono, vamos obter também um polígono decomposto em $2n$ triângulos rectângulos congruentes, tal como sugere a figura seguinte:



Também este polígono inscrito terá de perímetro $2n \times p$. Já a amplitude Â, considerando na imagem acima, o triângulo sombreado a azul, podemos agora representá-la da seguinte forma: $sen\ \hat{A} = \frac{p}{r}$. O que é equivalente a escrever que $p = r \cdot sen\left(\frac{360°}{2n}\right)$. Como também este perímetro é dado por $2n \times p$, podemos escrevê-lo da seguinte maneira: $2nr \cdot sen\left(\frac{360°}{2n}\right)$. Como o perímetro da circunferência é $2\pi r$ e o perímetro do polígono inscrito será menor do que o perímetro da circunferência, resulta-nos a seguinte desigualdade:

$$2\pi r > 2nr \cdot sen\left(\frac{360°}{2n}\right) \Leftrightarrow \pi > n \cdot sen\left(\frac{360°}{2n}\right). \qquad \textbf{(**)}$$

Tomando novamente o caso para $n = 6$, obtemos $\pi > 6 \cdot sen(30°) \Leftrightarrow \pi > 3$.

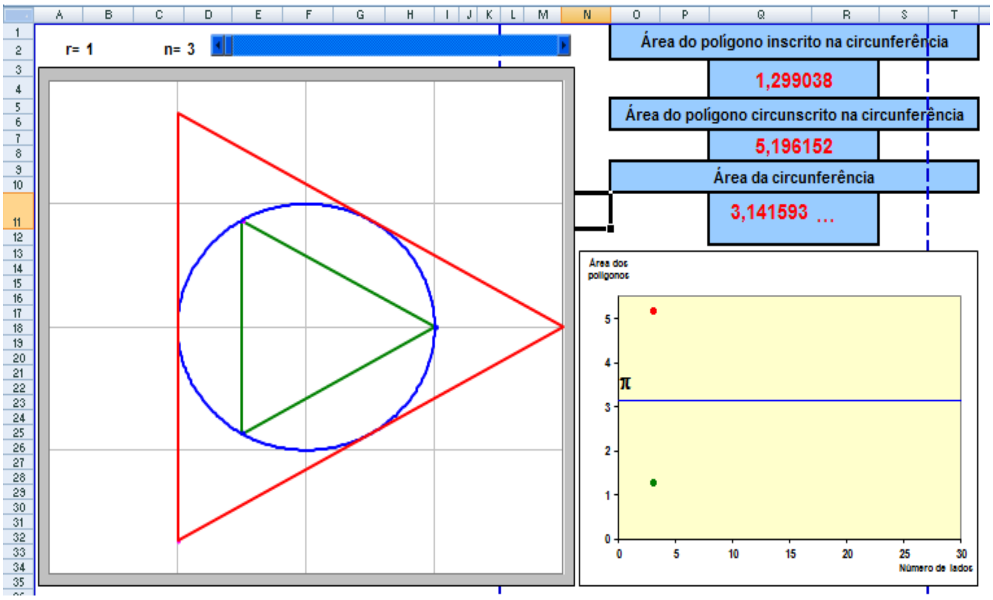
De **(*)** e de **(**)** podemos concluir que $n \cdot sen\left(\frac{360°}{2n}\right) < \pi < n\,tg\left(\frac{360°}{2n}\right)$. Concretamente para o caso do hexágono ($n = 6$), obtemos $3 < \pi < 3{,}4641$.

Utilizando este método, Arquimedes usou aproximações de π para $n = 12$, $n = 24$, $n = 48$ e $n = 96$. Observemos a tabela que se segue, onde se podem observar os valores obtidos por Arquimedes.

N.º de lados	Polígono inscrito	Polígono circunscrito
6	3	3,4641
12	3,1058	3,2154
24	3,1326	3,1597
48	3,1393	3,1461
96	3,1410	3,1428

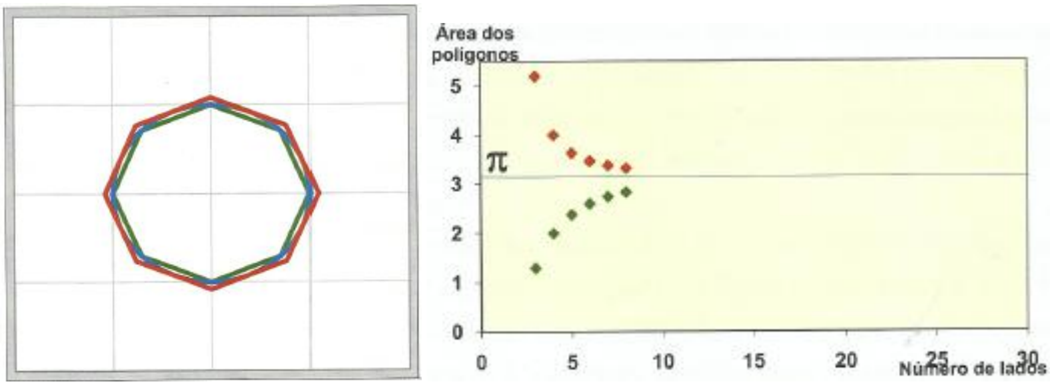
Da tabela decorre que, com um polígono de 96 lados, Arquimedes calculou um valor para π com duas casas decimais correctas. Salienta-se que este valor foi obtido sem utilizar símbolos algébricos, números árabes, ou notação decimal que são de uso comum actualmente.

Um método semelhante ao apresentado, que consiste em considerar as áreas dos polígonos regulares é utilizado numa aplicação interactiva criada em 2009 por Margarida Oliveira. ([24])

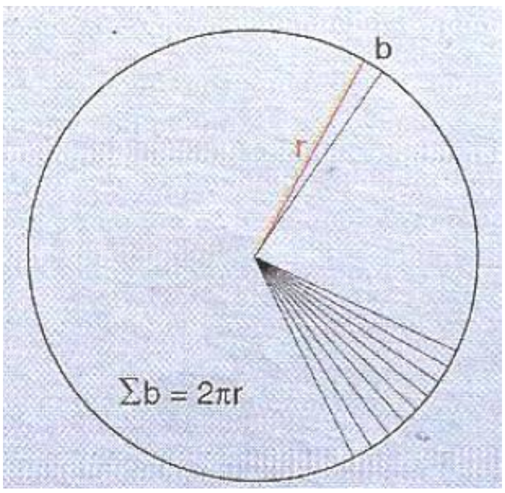


O objectivo desta aplicação consiste na exploração interactiva das sucessões cujos termos são as áreas de polígonos inscritos e circunscritos numa circunferência unitária. Este estudo potencia o estudo de aproximações por excesso e defeito do número π.

Se formos aumentando o número de lados, podemos obter valores cada vez mais próximos, conforme se ilustra abaixo:

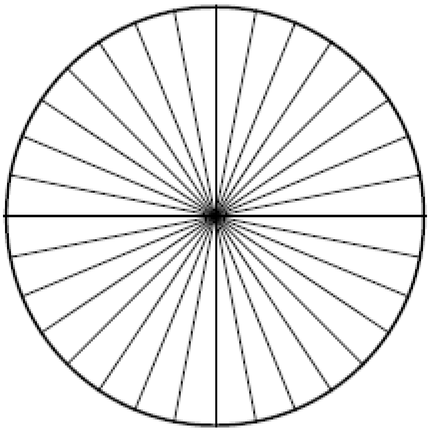


Arquimedes desenvolveu um método para calcular a área de um círculo, onde usou empiricamente os infinitésimos: a área do círculo é a soma das áreas de infinitos triângulos "infinitésimos" de base b e altura "igual" ao raio r.



A área de cada triângulo é $\frac{br}{2}$. Portanto, a área do círculo será apenas a soma de todas estas áreas infinitesimais, ou seja, $A=\sum\frac{br}{2}=\frac{r}{2}\sum b$. Mas, a soma de todas as bases destes triângulos, é também o perímetro do círculo, dado por $2\pi\, r$, logo, $A=\frac{r}{2}\cdot 2\pi r$, o que é o mesmo que escrevermos $A=\pi r^2$.

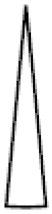
Arquimedes provou que a razão constante entre a área de um círculo e o quadrado do seu raio é o número π, pelo que a área de um círculo de raio r é $A=\pi r^2$. Assim, se expandirmos o círculo unitário ($r=1$), por um factor de escala, por exemplo igual a 3, o seu perímetro passa de 2π para 6π e a sua área passa de π para 9π.



A **demonstração de Arquimedes**, consistiu no seguinte:

Decomponhamos um círculo de raio 1 em 32 sectores iguais, conforme sugere a figura:

Designemos por P o perímetro da circunferência que limita o círculo.

Cada sector confunde-se com um triângulo, em que a sua altura é 1 e a base é, aproximadamente igual a $\frac{P}{32}$. Ora, a área de cada sector  é aproximadamente igual a $\frac{1}{2}\times\frac{P}{32}\times 1$ e, a área do círculo é aproximadamente igual a $32\times\frac{1}{2}\times\frac{P}{32}\times 1$, ou seja, a $\frac{P}{2}$.
À medida que se aumenta o número de sectores, cada um deles se aproxima mais de um triângulo e, podemos afirmar que $A=\frac{P}{2}$, isto é, $A=\pi$. ([9], [19], [19], [22], [27] e [29])

Arquimedes, à semelhança do que já foi apresentado acima para polígonos regulares inscritos e circunscritos na circunferência, estimou também o erro feito na aproximação da área do triângulo inscrito e do triângulo circunscrito na circunferência, concluindo que essa diferença se aproxima de zero tanto mais rápido quanto o número de fatias aumenta substancialmente.

(O mesmo tipo de raciocínio foi usado para obter as fórmulas da área do cone, do volume da esfera,…) Esta utilização empírica dos infinitésimos, com que Arquimedes obteve resultados espetaculares, foi retomada e desenvolvida no início do século XVII pelo frade

Bonaventura Cavalieri no cálculo de áreas e volumes e, no século XVIII pelos criadores do Cálculo Infinitesimal, Newton e Leibniz. Mas foi só no século XIX que o matemático francês Augustin Cauchy, um dos pioneiros do moderno rigor da Análise definiu o conceito de "infinitamente pequeno como uma variável que tem zero por limite" e deu uma definição lógica rigorosa do conceito de "limite".

Vejamos agora uma aproximação para π na qual alguns conceitos já saem do âmbito dos currículos de Matemática dos ensinos básico e secundário.

(O excerto que se segue para a obtenção de π foi retirado de um trabalho realizado durante a Licenciatura para a disciplina de História da Matemática, orientado e corrigido pelo Professor José Francisco Rodrigues.)

O famoso número transcendente, π, ocupou muitos matemáticos, ao longo da história da Matemática e, a fórmula para π mais comum consiste essencialmente na expressão:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

Uma recente e conhecida demonstração é feita com base na seguinte igualdade:

$$arctg\ x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt \quad ,$$

e, este último integral tende para zero se $|x| \le 1$, para $\left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt \right| \le \left| \int_0^x t^{2n+2}\,dt \right| = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} \to 0$, quando $n \to \infty$.

Assim, $arctg\ x$, tem, para $|x| \le 1$ uma representação

$arctg\ x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$ e, $\frac{\pi}{4}$ pode ser obtido da expressão obtida pondo $x = 1$.

Esta expressão foi independentemente obtida por:

- James Gregory (1638 – 1675);
- Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716); e,
- por um matemático indiano que se pensa ter vivido em meados do séc. XIV, XV e cuja identidade não é muito conhecida. Contudo, a demonstração deste indiano, de nome Nilakantha, surge a meio do séc.XV e resulta de estudos sobre as propriedades da circunferência.

Vejamos em detalhe o trabalho desenvolvido neste sentido por Nilakantha:

Este matemático indiano escreveu um livro chamado Tantrasangraha, que foi acompanhado por um comentário (Tantrasangraha-Vaklya) feito por um autor desconhecido. Nesta obra, os teoremas foram apresentados sem qualquer demonstração, mas posteriormente, em (1500-1610) foi publicada uma outra obra Yuktibhasa onde se podem encontrar demonstrações para as séries do $arctg\ x$, $seno$ e $\cos eno$. Contudo estes escritos estavam em "Malayalam", (Malaiano), língua falada pelo autor - Yyesthadeva (1500-1610), oriundo de Kerala, sudoeste Indiano – razão pela qual permaneceram desconhecidos durante algum tempo.

Foi um inglês, de nome C.M. Whish, em 1835, que trouxe estes trabalhos, constituintes das primeiras notícias do oriente nesta área. Infelizmente não tiveram quase impacto nenhum e permaneceram despercebidos quase durante um século, até que, Rajagopal e os seus associados começaram a publicar em inglês as descobertas e investigações relativamente a estes manuscritos. (Concretamente na obra "*On na Untapped Source of Medieval Keralese Mathematics*").

Obtenção de $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$ (1) por Nilakantha

Conhecendo a série de $arctg\ x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$ este matemático não só provou que $\frac{\pi}{4}$ se obtém tomando $x=1$, como também estabeleceu algumas funções racionais para que fosse minimizado o erro desta aproximação, ou seja um valor mais próximo para $\frac{\pi}{4}$ seria do tipo: $\frac{\pi}{4}\approx 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots\mp\frac{1}{n}\pm\ fi\ (n+1),\ i=1,2,3$, em que considerou:

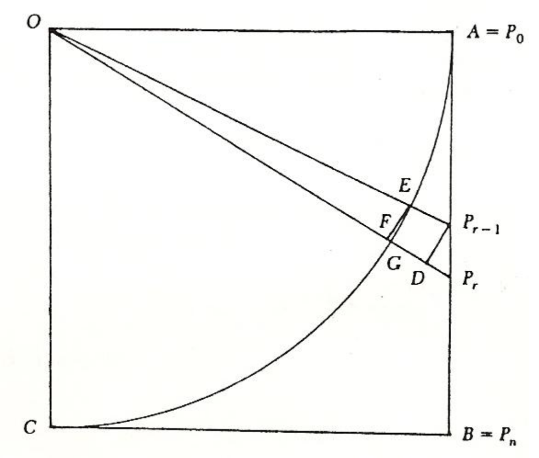
$$f1(n)=\frac{1}{2n} \qquad f2(n)=\frac{n/2}{n^2+1} \qquad f3(n)=\frac{\left(n/2\right)^2+1}{\left(n^2+5\right)\cdot n/2}$$

e assim, as novas séries obtidas desta transformação seriam:

- $\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}+\frac{1}{3^3-3}-\frac{1}{5^3-5}+\frac{1}{7^3-7}-\ldots$ **(2)**
- $\frac{\pi}{4}=\frac{4}{1^5+4\cdot 1}-\frac{4}{3^5+4\cdot 3}+\frac{4}{5^5+4\cdot 5}-\ldots$ **(3)**.

Veremos, segundo Nilakantha, **(1)** e **(2)**, dado que **(3)** obtém-se analogamente a **(2)**.

Consideremos a imagem seguinte:



Considere-se um quadrado de lado 1. Dividindo o lado AB em n partes iguais de comprimento δ, vem que $n \cdot \delta = 1$.

Tracemos $\overline{EF}$ e $\overline{P_{r-1}D}$, que são perpendiculares a $\overline{OP_r}$. Deste modo, obtivemos 2 triângulos semelhantes: OEF e $OP_{r-1}D$, assim pode-se estabelecer:

$\frac{\overline{EF}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{P_{r-1}D}}{\overline{OP_{r-1}}}$, donde $\overline{EF} = \frac{\overline{P_{r-1}D}}{\overline{OP_{r-1}}}$. (*1)

Da mesma forma, a semelhança entre os triângulos $P_{r-1}P_rD$ e OAP_r permite-nos estabelecer a seguinte relação: $\frac{\overline{P_{r-1}P_r}}{\overline{OP_r}} = \frac{\overline{P_{r-1}D}}{\overline{OA}}$, donde $\overline{P_{r-1}D} = \frac{\overline{P_{r-1}P_r}}{\overline{OP_r}}$. (*2)

Então, de (*1) e (*2), podemos reescrever

$$\overline{EF} = \frac{\frac{\overline{P_{r-1}P_r}}{\overline{OP_r}}}{\overline{OP_{r-1}}} = \frac{\overline{P_{r-1}P_r}}{\overline{OP_r} \cdot \overline{OP_{r-1}}} \cong_1 \frac{\overline{P_{r-1}P_r}}{\overline{OP_r}^2} =_2 \frac{\delta}{1 + \overline{AP_r}^2} =_3 \frac{\delta}{1 + r^2\delta^2} .$$

1) Tomamos $\overline{OP_r} = \overline{OP_{r-1}}$. Pois δ é tão pequeno quanto queiramos. Assim, podemos considerar o triângulo OAP_r, rectângulo em A.

2) Teorema de Pitágoras

3) $\overline{AP_r} = r\delta$.

Assim, o comprimento do arco $EG \approx EF = \frac{\delta}{1 + r^2\delta^2}$ e, sabemos que $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{8}$ de um círculo. Então, geometricamente, podemos verificar que $\frac{\pi}{4}$ vai ser a soma de todos os arcos infinitesimais até se conseguir traçar o segmento de recta $[OB]$. Portanto queremos calcular $\lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{n} \frac{\delta}{1 + r^2\delta^2}$.

Antes de calcular este limite, façamos algumas considerações sobre conhecimentos utilizados por Nilakantha:

- Soma da série geométrica: $\frac{1}{1+x} = \sum_{n \geq 0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n = \sum_{n \geq 0}^{\infty} (-x)^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$;
- Artifício de Cálculo:

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1+x-x}{1+x}=1-\frac{x}{1+x}=(\textit{usando o mesmo artifício})\,1-x\left(1-x\left(\frac{1}{1+x}\right)\right)$$

- Notação utilizada:

  $$1^p+2^p+\ldots+n^p=S_n^{(p)}\approx\frac{n^{p+1}}{p+1}.$$

- Note-se também que: $n\delta=1\Leftrightarrow\delta=\frac{1}{n}\Leftrightarrow\delta^p=\frac{1}{n^p}$.

Agora, queremos ver que $\frac{\pi}{4}=\sum_{r=1}^{n}\frac{\delta}{1+r^2\delta^2}=\delta\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{1+r^2\delta^2}$.

Portanto queremos calcular $\lim_{n\to+\infty}\delta\cdot\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{1+r^2\delta^2}$. Temos que se trata de uma série geométrica de razão $-r^2\delta^2$. Deste modo, e tendo em conta as considerações acima, vem que:

$$\lim_{n\to+\infty}\delta\cdot\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{1+r^2\delta^2}=\lim_{n\to+\infty}\delta\cdot\sum_{r=1}^{n}\left(1-r^2\delta^2+\left(r^2\delta^2\right)^2-\left(r^2\delta^2\right)^3+\ldots\right)=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left[\delta\cdot\sum_{r=1}^{n}1-\delta^3\cdot\sum_{r=1}^{n}r^2+\delta^5\cdot\sum_{r=1}^{n}r^4-\delta^7\cdot\sum_{r=1}^{n}r^6+\ldots\right]=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left[n\cdot\delta-\frac{1}{n^3}\cdot\sum_{r=1}^{n}r^2+\frac{1}{n^5}\cdot\sum_{r=1}^{n}r^4-\frac{1}{n^7}\cdot\sum_{r=1}^{n}r^6+\ldots\right]=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left[1-\frac{1}{n^3}\cdot S_n^{(2)}+\frac{1}{n^5}\cdot S_n^{(4)}-\frac{1}{n^7}\cdot S_n^{(6)}+\ldots\right]=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left[1-\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n^3}{3}+\frac{1}{n^5}\cdot\frac{n^5}{5}-\frac{1}{n^7}\cdot\frac{n^7}{7}+\ldots\right]=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots\right]=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\frac{\pi}{4}$$

E assim, obtivemos **(1)**.

Mas, Nilakantha, conforme indicado inicialmente, descobriu ainda uma aproximação melhor para o valor de $\frac{\pi}{4}$ do tipo:

$\sigma_n=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n-2}+(-1)^n\cdot\frac{1}{n}+(-1)^{n+1}\cdot f(n+1)$, para n ímpar, sendo $f(n+1)$ uma função racional.

Mudando n para $(n-2)$, obtemos:

$$\sigma_{n-2} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} + (-1)^{n} \cdot f(n-1).$$

Subtraindo as expressões dos $\sigma' s$ encontrados acima, vem,

$$\sigma_n - \sigma_{n-2} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{1}{n} + (-1)^{\frac{n+1}{2}} \cdot f(n+1) - (-1)^{\frac{n+1}{2}} \cdot f(n-1) =$$

$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot U_n \qquad \text{(com } U_n = \frac{1}{n} + (-1)^{\frac{n+1}{2}} \cdot f(n+1) - (-1)^{\frac{n+1}{2}} \cdot f(n-1) \text{).}$$

Assim, $\sigma_n - \sigma_{n-2} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot U_n \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_n = \sigma_{n-2} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot U_n$

(a última expressão obtida, é a que será utilizada nos passos seguintes)

Desta última expressão, podemos escrever: $\sigma_{n-2} = \sigma_{n-4} + (-1)^{\frac{n-3}{2}} \cdot U_{n-2}$

E, a expressão que estava a ser utilizada, pode ser reescrita como:

$$\sigma_n = \sigma_{n-4} + (-1)^{\frac{n-3}{2}} \cdot U_{n-2} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot U_n =$$

$$= \sigma_{n-6} + (-1)^{\frac{n-5}{2}} \cdot U_{n-4} + (-1)^{\frac{n-3}{2}} \cdot U_{n-2} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot U_n =$$

$$= \dots = \qquad \text{(repetindo sucessivamente este processo)}$$

$$= \sigma_1 - U_3 + U_5 - U_7 + \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot U_n =$$

$$= 1 - f(2) - U_3 + U_5 - U_7 + \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot U_n .$$

Portanto, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = \lim\limits_{n} \underbrace{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots}_{\to \frac{\pi}{4}} \underbrace{\pm \frac{1}{n}}_{\to 0} \underbrace{\mp f(n+1)}_{\to 0 \ \forall\ f_i,\ i=1,2,3}$

$$\therefore \lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \frac{\pi}{4}.$$

Mas, se $\sigma_n = 1 - f(2) - U_3 + U_5 - U_7 + \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot U_n$, quando passamos ao limite vem $\frac{\pi}{4} = 1 - \underbrace{f(2)}_{\substack{dependeda \\ funçãoescolhida}} - U_3 + U_5 - U_7 + \dots$ e,

$$U_n = \frac{1}{n} - f(n+1) - f(n-1) \quad \Leftrightarrow \quad f(n+1) + f(n-1) = \frac{1}{n} - U_n .$$

Assim, para que $\frac{\pi}{4} = = 1 - f(2) - U_3 + U_5 - U_7 + \ldots$ convirja mais rapidamente para zero, queremos que $U_n = \circ\left(\frac{1}{n}\right)$, ou seja que U_n seja um infinitésimo de ordem superior a $\frac{1}{n}$. Por outras palavras, $U_n = \circ\left(\frac{1}{n}\right) \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{U_n}{1/n}\right) = 0$.

Para n grande é razoável admitirmos que $f(n+1) \cong f(n-1) \cong f(n)$ e, tendo $f(n+1) + f(n-1) = \frac{1}{n} - U_n$, podemos escrever

$$2\, f(n) = \frac{1}{n} - \underbrace{U_n}_{\substack{desprezável \\ para\, n\, grande}} \Leftrightarrow 2f(n) \approx \frac{1}{n} \Leftrightarrow f(n) = \frac{1}{2n},$$ que é exactamente $f_1(n)$ dada inicialmente.

Tínhamos $U_n = \frac{1}{n} - f(n+1) - f(n-1)$ e assim podemos reescrever U_n como: $U_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n-1)} = \ldots = -\frac{1}{n^3 - n}$.

Deste modo,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - f(2) - U_3 + U_5 - U_7 + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{3^3-3} - \frac{1}{5^3-5} + \frac{1}{7^3-7} \ldots = \frac{3}{4} + \frac{1}{3^3-3} - \frac{1}{5^3-5} + \frac{1}{7^3-7} \ldots$$ pelo que acabámos de obter a 1ª série proposta em **(2)**.

De maneira análoga, se $f(n) = f2(n) = \frac{n/2}{n^2+1}$, obteríamos $\frac{\pi}{4} = \frac{4}{1^5 + 4\cdot 1} - \frac{4}{3^5 + 4\cdot 3} + \frac{4}{5^5 + 4\cdot 5} - \ldots$, que seria a 2ª série proposta em **(3)**.

IV.3.2 - O número e

Diz-se que o número *e* é um dos, senão "o" número irracional mais misterioso e, simultaneamente mais querido dos matemáticos, apesar da sua popularidade não ser tão grande como a de phi (φ) ou de pi (π). É, tal como os anteriores, um número *transcendente* (simultaneamente *irracional* – dízima infinita e não-periódica - e *não* *algébrico* – Um número que não pode ser definido como raíz de uma equação algébrica de coeficientes inteiros), por muitos considerado o "*Príncipe da Aritmética*" (Bento de Jesus Caraça, 1951).

Façamos, para já, uma apresentação do seu valor: $e = 2{,}71828182845904523536...$

Claro que não tem uma grande relevância saber todas estas casas decimais além da 3ª ou da 4ª, mas é importante que não nos esqueçamos da seguinte igualdade, que mais adiante veremos com maior detalhe:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Este número foi de extrema importância para o desenvolvimento da ciência e da própria matemática nos últimos séculos. Antes da invenção dos computadores, foi exactamente com base no número *e* que os matemáticos e cientistas se apoiaram para executarem cálculos com a máxima precisão/ exactidão. Pode até afirmar-se que sem a descoberta deste número, ainda nos dias de hoje poderíamos estar a lutar por elaborar máquinas que funcionassem! Não teríamos automóveis, aviões e, talvez até nem computadores! Em vez de lermos este documento escrito num computador, poderíamos estar a trabalhar no milho ou no carvão!

A história do *e* começa com John Napier, também conhecido por Neper, nascido em 1550 em Edimburgo, Escócia. Formado em Teologia, pela Universidade de St. Andrews na Escócia, tinha como passatempo experimentar novas formas de melhorar solos agrícolas através de sais. Foi o inventor de uma ferramenta matemática, à qual chamou de logaritmo.

Segundo Napier, esta ferramenta era um meio de tornar consideravelmente mais simples e de agilizar o tempo despendido nos cálculos envolvendo multiplicação, divisão e extracção de raízes.

Napier apercebeu-se que os logaritmos têm propriedades muito especiais e que facilmente transformam multiplicações em adições e divisões em subtracções. Os logaritmos transformam também raízes em multiplicações. Nesta altura, em que os cálculos eram feitos à mão, estas simplificações eram consideradas mágicas e, a sua relevância estava a par de um computador aos dias de hoje.

Perante esta sua preciosa descoberta, o que apenas era necessário eram as tabelas de logaritmos e alguma agilidade no cálculo, o que permitia executar num curto espaço de tempo operações complexas com precisão. O uso das tabelas de logaritmos foi gradualmente substituído pela utilização da régua de cálculo.

Os logaritmos foram considerados tão importantes que se expandiram rapidamente por vários países. Keppler nunca teria conseguido entender o movimento dos planetas sem os logaritmos, nem Newton estaria apto a desenvolver as leis da gravidade. Todos os matemáticos subsequentes fizeram grande uso dos logaritmos nos seus trabalhos. 200 anos mais tarde, o matemático Laplace chegou mesmo a afirmar que "*(…)encurtando os cálculos, duplicamos o trabalho realizado de um astrónomo.*"

Se introduzirmos na calculadora o número 100000 e premirmos a tecla "log", o resultado é 5. Analogamente, se introduzirmos o número 0,00001 e premirmos a tecla "log", o resultado é -5. Porquê? Porque o logaritmo na base 10 de 10000 é o número a que se deve elevar 10 para obter 10000, ou seja, $\log 10^5 = 5$ e $\log 10^{-5} = -5$.

Mais geralmente, qualquer número positivo diferente de 1 pode ser tomado como base para um logaritmo. O logaritmo de b na base a é um número real x tal que $a^x = b$, pelo que $a^{\log_a b} = b$.

A tecla "$\ln$" refere-se ao logaritmo na base *e*, sendo *e* o número de Euler (denominado assim em homenagem a Leonhard Euler). A descoberta desta constante é atribuída a Jacob Bernoulli que procurava calcular o valor de $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, que terá surgido a propósito de um problema de juros compostos.

Cálculo de **juros compostos**:

Suponha-se um capital P depositado numa instituição bancária, a uma taxa de juro r, que se supõe composta anualmente. Que capital se terá ao fim de t anos?

- Ao fim do primeiro ano o capital será $A_1 = P + rP$

- Ao fim do segundo ano, o capital será

$A_2 = A_1 + rA_1 = P + rP + r(P + rP) = P(1+r)(1+r) = P(1+r)^2$.

- Ao fim de t anos o capital será $A_t = P(1+r)^t$.

Suponha-se agora que o capital P à taxa de juro r é composto n vezes ao ano. Ao fim de t anos, o juro foi composto nt vezes recebendo-se $\frac{r}{n}$ de juros. O capital ao fim de t anos será $A_t = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$. Assim, se o juro for composto continuadamente (no sentido em que os juros se podem compor ao minuto, ao segundo, ao milésimo de segundo, etc…) ao fim de t anos o capital será $A_t = \lim_{n\to+\infty} P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} = P\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n}\right)^{t} = Pe^{rt}$.

O cálculo do capital final ao fim de um certo número de anos, depende do valor de $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Bernoulli intuiu que este limite existe e o seu valor está compreendido entre 2 e 3.

Confirmemos esta conjectura em duas fases: Numa primeira fase, que existe limite e, na segunda fase, que este está, de facto, compreendido entre 2 e 3.

Pelo teorema das sucessões monótonas, toda a sucessão monótona e crescente tem limite, finito ou infinito. É imediato que a sucessão de termo geral $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$,$(n=1,2,\ldots)$ tem todos os seus termos positivos. Para verificarmos que se trata de uma sucessão crescente, desenvolvemos o termo geral segundo a fórmula do binómio de Newton:

$$u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n}\cdot\frac{1}{n^n}$$

ou

$$u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{1}{1!}\cdot\frac{n}{n}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{n(n-1)}{n^2}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}+\cdots+\frac{1}{n!}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{n^n}$$

ou ainda

$$u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{1}{1!}+\frac{2}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

(*)

Se suprimirmos a última parcela (positiva) e aumentarmos todos os subtractivos, da igualdade acima resulta que

$$u_n>1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n-1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n-1}\right)\left(1-\frac{2}{n-1}\right)+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\left(1-\frac{1}{n-1}\right)\left(1-\frac{2}{n-1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-2}{n-1}\right)$$

Como o segundo membro da desigualdade é precisamente, o termo u_{n-1} no 2º membro, conclui-se que $u_{n-1}<u_n$ para qualquer n inteiro e positivo. Logo, a sucessão é crescente.

Vejamos agora que a sucessão de termo geral $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é limitada superiormente. Da igualdade **(*),** atendendo a que todos os parêntesis do 2º membro são todos menores que a unidade, vem que $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$.

(**)

Como $p! > 2^{p-1}$ $(para\ p \geq 3)$, inteiro e positivo, de **(**)** podemos escrever:

$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$. Observando o 2º membro desta desigualdade verificamos que, a partir da 2ª parcela, temos uma soma de termos consecutivos de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$, pelo que a desigualdade anterior se pode escrever na forma $u_n < 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}$ e assim $u_n < 1+2-\frac{1}{2^{n-1}} < 3$. Deste modo verificamos que qualquer termo da sucessão é menor que 3, portanto a sucessão está limitada superiormente por 3. Se a sucessão é crescente e limitada superiormente, então existe e é finito o $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Falta-nos agora verificar que está compreendido entre 2 e 3.

Sendo $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ temos que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 3$. Se em **(*)**, com $n \geq 2$, suprimirmos termos positivos do 2º membro da igualdade, podemos escrever $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1+\frac{1}{1!} = 2$. Portanto vem que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2$ e, por fim, $2 \leq \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 3$.

Verifiquemos que o número e se pode também exprimir como o limite da sucessão (S_n) em que $S_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}$.

Já vimos acima, de **(**)**, que $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} = S_n$.

Consideremos ainda a igualdade **(*)**, com $n > m$, m inteiro e positivo,

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)+$$
$$+\frac{1}{(m+1)!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Daqui, com n suficientemente grande e por serem positivos todos os termos do segundo membro, obtemos:

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right).$$

Se tomarmos os limites de ambos os membros desta desigualdade, quando $n \to \infty$, obtemos:

$$e \geq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{m!} = S_m .$$

Ora, por um lado temos que $u_n < S_n$, e, por outro lado, temos, $e \geq S_m$, ou, o que é o mesmo que termos (por m ser inteiro e positivo) $e \geq S_n$. Isto é, $u_n < S_n \leq e$, se utilizarmos limites, obtemos $\lim\limits_{n\to\infty} U_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} S_n \leq e$. Donde, reescrevendo a igualdade acima,

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots \leq e$. Mas, sendo por definição $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, temos, como se pretendia, $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)$ ([3])

Bernoulli verificou que usando o número e, podia construir uma espiral que parecia estar em todo o lado: em conchas do mar, pétalas de flores, cornos de animais,… Bernoulli chamou a esta espiral a *espiral logarítmica* e, quando faleceu, aos 51 anos, exigiu que a espiral fosse gravada na sua sepultura, com a inscrição em Latim *Eadem Mutata Resurgo,* que significa "*Mudado e ainda o mesmo, eu ressurjo novamente*".

IV.3.3 - A sucessão de Fibonacci e o número φ

Fibonacci, cujo nome de baptismo era Leonardo de Pisa (1175-1250) foi um dos grandes matemáticos da Idade Média que prestou valiosos contributos para os campos da Aritmética, da Álgebra e da Geometria.

Graças à profissão do seu pai, que era mercador italiano, Fibonacci teve oportunidade de viajar por inúmeras cidades entre o Próximo e o Médio Oriente, onde pode ter contacto e familiarizar-se com o sistema decimal hindu-árabe, que tinha valor posicional e usava o símbolo zero. (Note-se que nesta altura em Itália ainda era utilizada a numeração romana nas operações de cálculo).

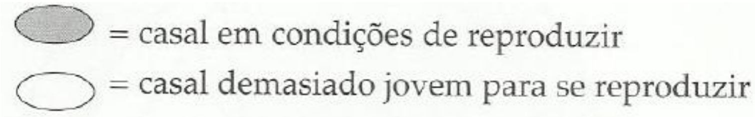
Fascinado pela beleza dos numerais hindu-árabes, começou a defender acerrimamente a sua adopção e em 1202 escreveu *Liber Abaci*, um manual completo em que explicava como utilizar aqueles numerais nas operações elementares de adição, subtracção, multiplicação e divisão e ainda na resolução de problemas com abordagens a vários temas de álgebra e geometria.

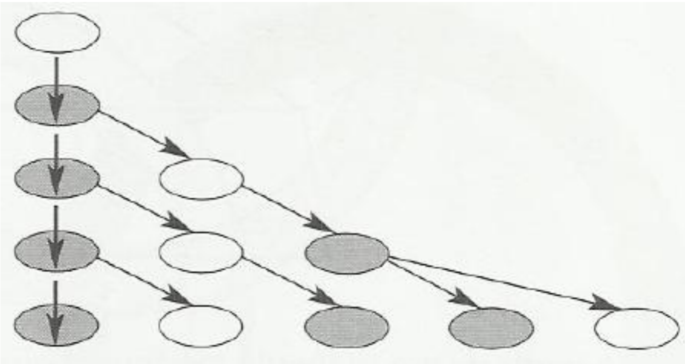
Curiosamente, Fibonacci é hoje famoso graças a uma sequência numérica que resultou de um problema existente no seu livro *Liber Abaci*, considerando-o apenas como um exercício mental. Porém, no século XIX, quando o matemático francês Edouard Lucas (1842-1891) editou um trabalho de matemática recreativa, *Recréations Mathématiques* relaciona o nome de Fibonacci à sequência numérica que era a solução do problema do *Liber Abaci (*Ou também chamado *Livro do Ábaco* publicado em 1202*).*

O problema que dá origem à sucessão de Fibonacci, cujo nome na versão original do *Liber Abaci* é *Quot paria cuniculorum in uno anno ex uno pario germinentur* é o seguinte:

1) Suponhamos que um casal de coelhos com um mês de idade (macho e fêmea)são ainda muito jovens para se reproduzir, mas que, com dois meses de idade já têm maturidade suficiente para o fazer. Admitamos igualmente que todos os meses, a partir dos dois meses de idade, dão origem a um novo casal de coelhos (macho e fêmea).

2) Se todos os casais de coelhos se reproduzirem da mesma forma que o primeiro, quantos casais de coelhos haverá no princípio de cada mês?





Número de casais:

$1 = F_1 = 1^{\text{o}}$ *número de Fibonacci*

$1 = F_2 = 2^{\text{o}}$ *número de Fibonacci*

$2 = F_3 = 3^{\text{o}}$ *número de Fibonacci*

$3 = F_4 = 4^{\text{o}}$ *número de Fibonacci*

$5 = F_5 = 5^{\text{o}}$ *número de Fibonacci*

...

Cada termo é igual à soma dos dois termos anteriores e é representado pela fórmula $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 1$.

Mas podemos ainda considerar o elemento zero e, nesse caso falamos nos números de Fibonacci, estamos assim a considerar os elementos da sucessão $(F_n)_{n \in \mathrm{N}_0} = 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, \ldots$
O que esta sucessão tem de particular é que cada um dos seus termos é a soma dos dois que o precedem. E portanto, esta sucessão também pode ser definida da seguinte forma:

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1,$$
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \, n \in \mathrm{N}, \, n \geq 2$$

Esta sucessão liga harmoniosamente a álgebra com a geometria aparecendo em vários campos da Matemática como os seguintes:

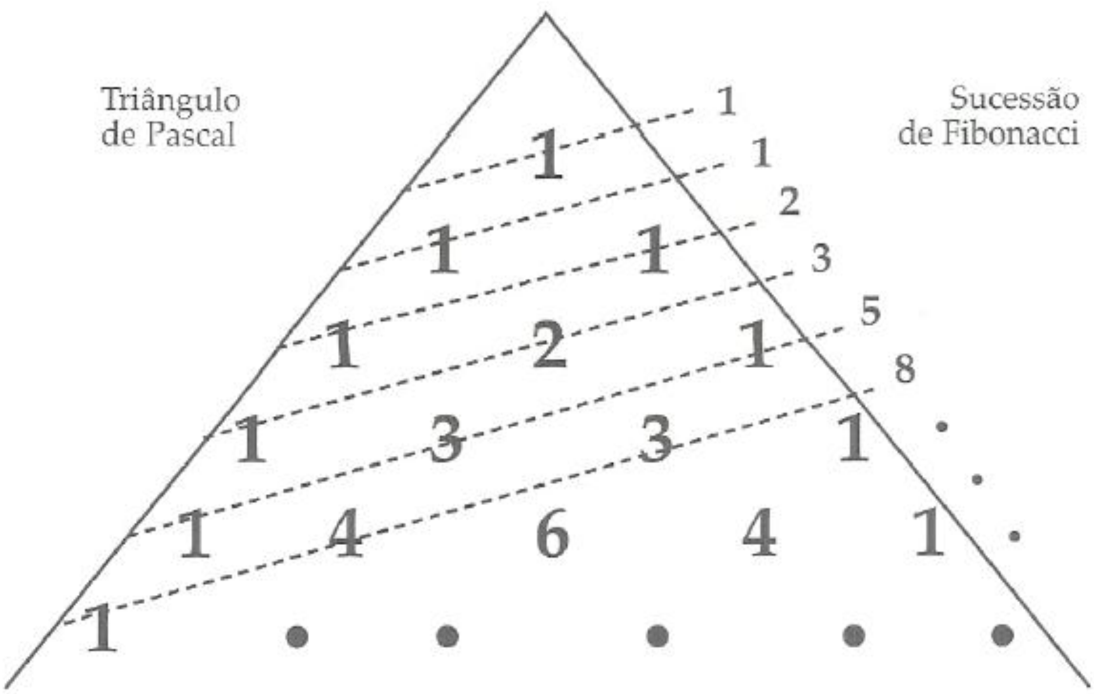
I. Triângulo de Pascal, fórmula binomial e cálculo de probabilidades
II. Razão de Ouro e rectângulo de Ouro
III. Curiosidades com números

I – Triângulo de Pascal, fórmula binomial e cálculo de probabilidades

Com apenas 12 anos, Blaise Pascal (1623-1662) começou a mostrar-se imensamente dotado e talentoso para a geometria. Logo com 16 anos escreveu um ensaio sobre cónicas que lhe valeu o reconhecimento dos seus professores e colegas matemáticos da época. Com apenas 18 anos inventou uma das primeiras máquinas de calcular e, apesar da sua débil saúde, três anos mais tarde escreve o seu trabalho sobre o triângulo de Pascal e as suas propriedades.

Um dos fascínios da Matemática é, sem dúvida, a particularidade de relacionar ideias que, à primeira vista parecem completamente independentes. É exactamente o que se passa com o triângulo de Pascal, com a sucessão de Fibonacci e com a fórmula binomial de Newton. Analisemos a imagem que se segue para que se compreenda inequivocamente a sua interligação.

$(a+b)^0 = 1$	1
$(a+b)^1 = 1a + 1b$	1 1
$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$	1 2 1
$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$	1 3 3 1



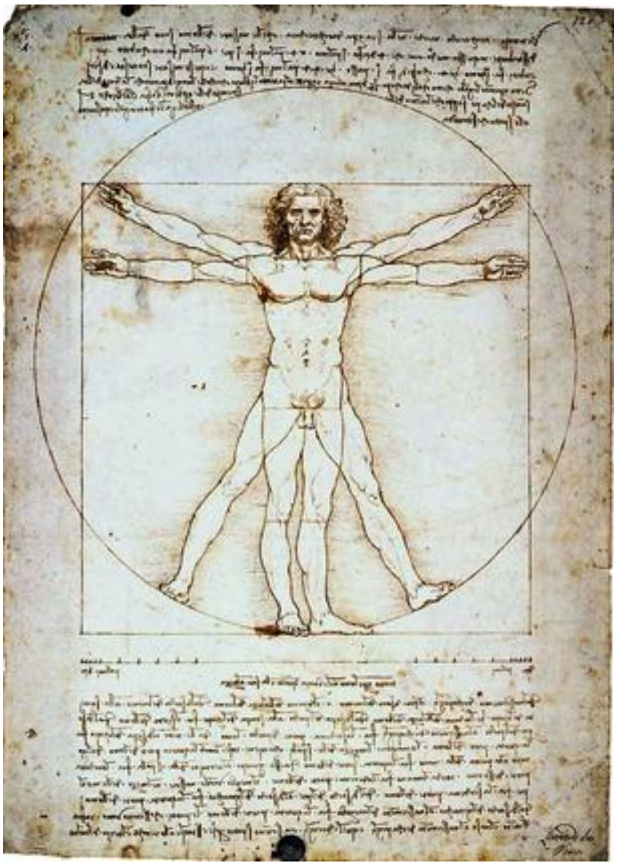
Podemos facilmente verificar na imagem apresentada que as somas dos números dispostos ao longo das diagonais do triângulo de Pascal geram a sucessão de Fibonacci. Por outro lado, cada linha do triângulo de Pascal representa os coeficientes do desenvolvimento de uma determinada potência do binómio $(a+b)$.

II - Razão de Ouro e rectângulo de Ouro

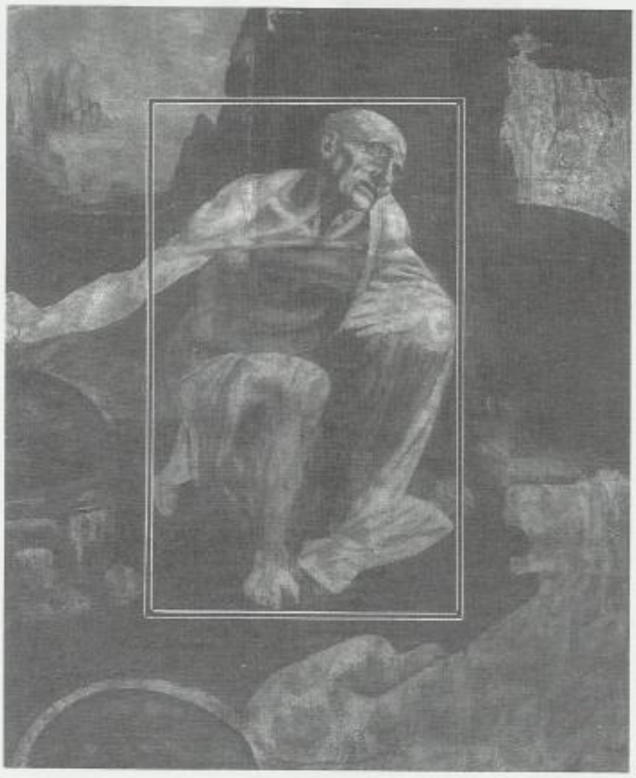
O Número de Ouro é um número irracional, $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que surge em muitos contextos na forma de uma razão, a razão de ouro, também chamada divina proporção, proporção de ouro, entre outras designações.

Um rectângulo é de ouro se a razão entre os comprimentos do lado maior e do lado menor é igual ao número de ouro.

Leonardo da Vinci estudou exaustivamente as proporções do corpo humano, relacionando a anatomia humana com o número de ouro. O conhecido desenho abaixo, pertence ao livro que Leonardo da Vinci ilustrou para o Matemático Luca Pacioli, de nome *De Divine Proportione*, publicado em 1509.



A *Razão de Ouro* encontra-se presente em muitas obras de arte como na pintura intitulada *S. Jerónimo*, um trabalho inacabado de Leonardo da Vinci, pintado em 1483: a figura inscreve-se perfeitamente num rectângulo de ouro como se pode ver na figura seguinte. Acredita-se que tal não tenha sucedido por acaso, mas pelo facto de Leonardo da Vinci ter um grande interesse pela Matemática e pela utilização desta em muitas das suas ideias e trabalhos. Segundo as palavras do próprio Leonardo, " *… nenhuma investigação humana pode ser considerada ciência se não abrir o seu caminho por meio da exposição e da demonstração matemáticas.*"



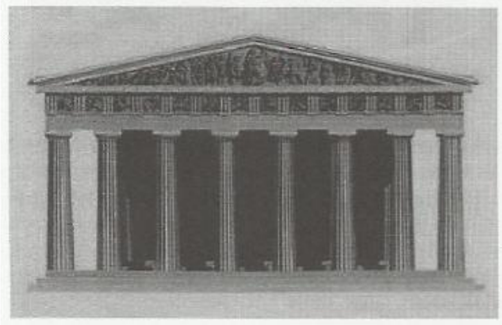
S. Jerónimo, de Leonardo da Vinci, cerca de 1483.

Considere-se um segmento de recta AC e seja B um ponto deste segmento tal que $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|BC|}$. O número de ouro é igual à razão entre os comprimentos dos segmentos de recta AC e AB. Com efeito, tomemos $AC = 1$ e $AB = x$. A igualdade anterior toma a forma $\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$. Resta resolver a equação $\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$.

Tem-se

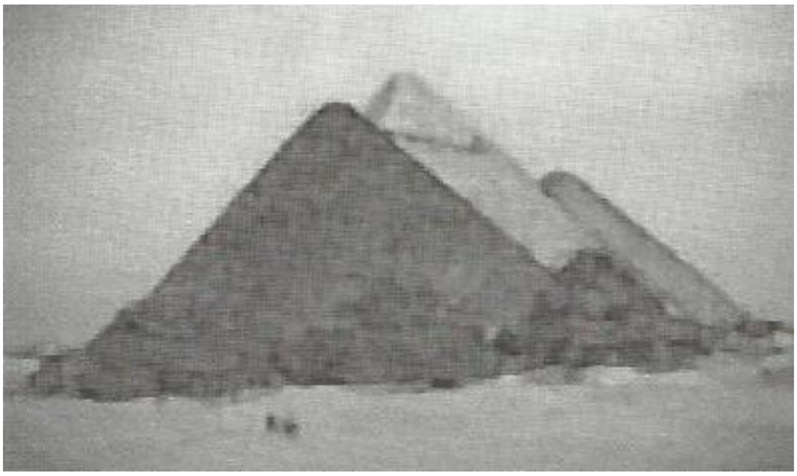
$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow -x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Tendo em conta que se trata de um comprimento, tem-se $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6$. (Em Maio do ano 2000, após apenas 3horas de cálculo, foram calculadas as suas primeiras 1 500 000 000 casas decimais.)

O Rectângulo de Ouro, conhece uma das suas primeiras utilizações na arquitectura, no Parténon em Atenas, na Grécia.



A razão entre o comprimento e a altura do Parténon é o número de ouro.

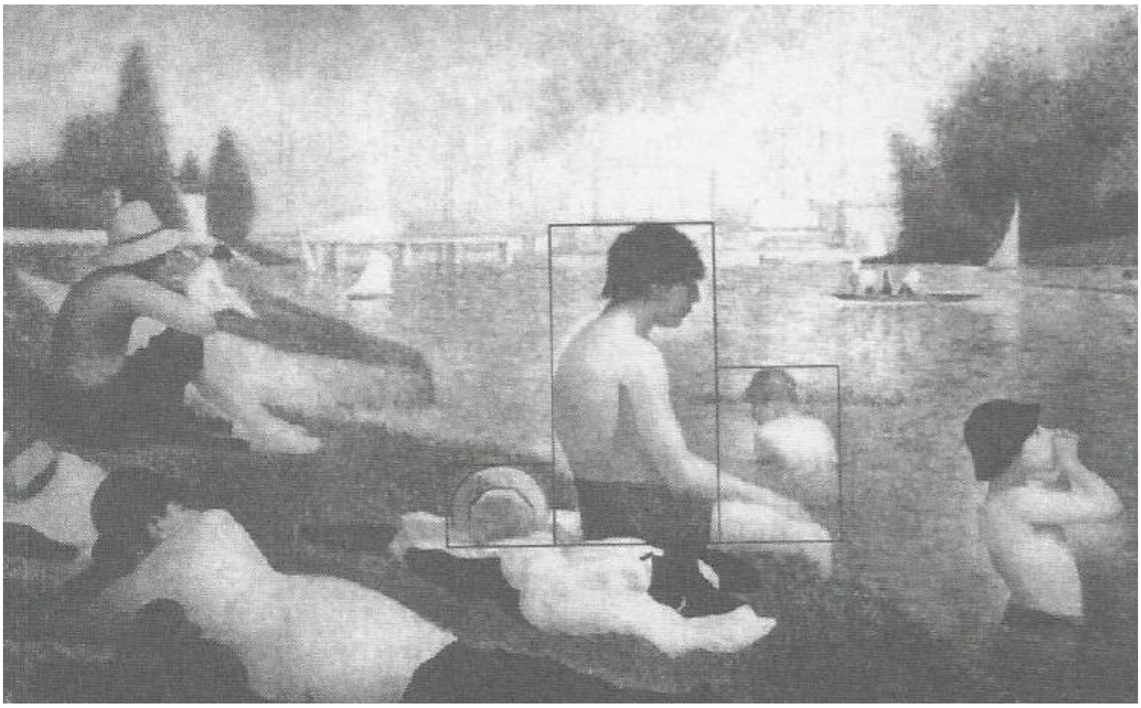
Portanto, já no século V a.C. os arquitectos da Grécia Antiga conheciam o seu efeito harmonioso. Mas, é possível que as origens desta tradição venham ainda de mais longe, já que no Papiro de Rhind encontra-se uma referência a um *quociente sagrado* e o quociente, na pirâmide de Queóps (Egipto), da sua altura pela metade do lado da base, é quase 1,618. Será coincidência?



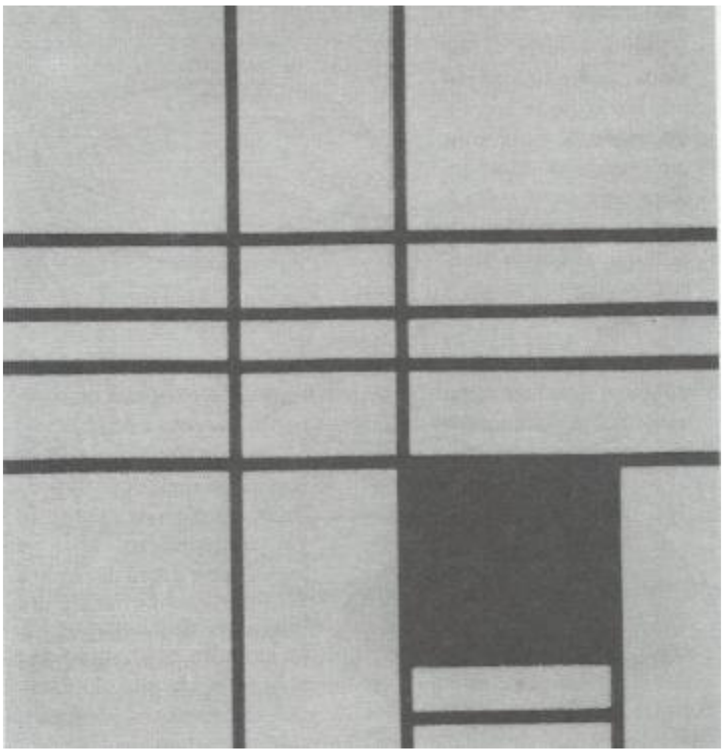
Alguns testes psicológicos demonstraram que o Rectângulo de Ouro é um dos rectângulos mais agradáveis à vista humanos (Os psicólogos alemães Gustav Fechner (1801-1887) e Wihelm Wundt (1832-1920) mostraram, realizando várias experiências, que a maioria das pessoas, inconscientemente, prefere as dimensões do rectângulo de ouro ao seleccionar quadros, espelhos, cartas, pacotes e outros objectos rectangulares). Na publicidade e no marketing o rectângulo de ouro é usado frequentemente: muitas embalagens têm a configuração do rectângulo de ouro, provavelmente com o objectivo de apelar ao sentido estético do público. Um exemplo bastante conhecido de todos é a forma do vulgar cartão de crédito, que tem um tamanho próximo ao do rectângulo de ouro.

Os gregos da antiguidade conheciam a *proporção de ouro*, como obtê-la, como conseguir uma aproximação conveniente e como a utilizar na construção do rectângulo de ouro. Não é por acaso que a *proporção de ouro*, $\varphi\left(fi\right)$, foi designada segundo o nome de $Fídias$, famoso escultor grego. Julga-se que $Fídias$ terá usado a proporção de ouro e o rectângulo de ouro nos seus trabalhos. É também possível que os pitagóricos tenham escolhido o pentagrama como símbolo, devido à relação que este tem com a proporção de ouro. A utilização desta proporção na arte veio a ser designada como a técnica da *simetria dinâmica*.

Leonardo da Vinci, Salvador Dali, George Bellows, Albrecht Durer, George Seurat, Pietter Mondrian são alguns dos nomes sonantes que utilizaram o rectângulo de ouro em alguns dos seus trabalhos para criar a simetria dinâmica.



Quadro os Banhistas (1859-1891) do pintor impressionista francês George Seurat, onde estão destacados três rectângulos de ouro.



Composição com Amarelo, Mondrian, 1936. Sabe-se que Mondrian utilizou nas suas telas o rectângulo de ouro.

Na natureza, temos inúmeros exemplos que apresentam simetria: folhas, flocos de neve, borboletas, corpo humano… Mas, existem muitas formas naturais que não são simétricas. Se considerarmos a forma de um ovo, de uma asa de uma borboleta, a concha de um náutilo ou um sargo, estas formas não simétricas também possuem um equilíbrio harmonioso que ficou a ser conhecido como *simetria dinâmica*.

($[1]$, $[11]$ e $[13]$)

A sucessão de Fibonacci (F_n) está relacionada com o número de ouro, φ: tem-se que $\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$. ($[11]$)

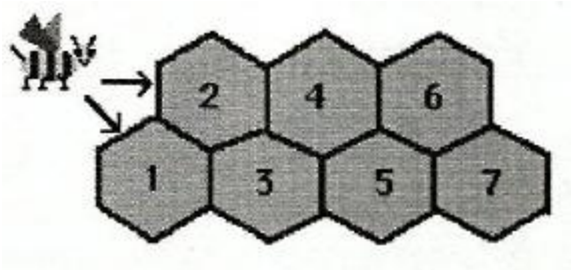
III – <u>Curiosidades com números</u>

(1) Escolhendo quaisquer dois números e construindo uma sucessão (com pelo menos um dos dois primeiros termos diferente de zero) gerada pelo processo da sucessão de Fibonacci (em que cada termo é obtido por meio da soma dos dois termos anteriores) tem a curiosa característica de que a soma dos seus dez primeiros termos é igual a onze vezes o sétimo termo! Demonstra-se facilmente que isto sucede para quaisquer dois números iniciais escolhidos: Se a e b forem dois números escolhidos aleatoriamente e representarem o primeiro e o segundo termos, então do terceiro ao décimo termo, obtemos, respectivamente, $a+b,\ a+2b,\ 2a+3b,\ 3a+5b,\ 5a+8b,\ 8a+13b, 13a+21b,\ 21a+34b$. Ao considerar a soma dos dez primeiros termos, obtemos $55a+88b$, o que representa onze vezes o sétimo termo, $5a+8b$.

(2) De quantas formas distintas podemos arrumar dominós, de tamanho 2×1 em tabuleiros $2\times n$?

Resposta: O número de Fibonacci F_{n+1} fornece o número de maneiras distintas de arrumar dominós de tamanho 2×1 em tabuleiros $2\times n$, como se verifica na imagem que se segue.

(3) Qual o número de possíveis caminhos que uma abelha, que se desloca sempre para a direita, faz até chegar à célula n?



Resposta: O número de possíveis caminhos de uma abelha até chegar à célula n (e deslocando-se sempre para a direita é dado por F_n).

(4) O número de ouro pode ser expresso à custa de *muitas* raízes quadradas:

$$\varphi=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}}}}}}}$$

De facto, se pensarmos na sucessão definida por $\begin{cases} u_1=\sqrt{1} \\ u_n=\sqrt{1+u_{n-1}} \end{cases}, n\geq 2$, trata-se claramente de uma sucessão monótona crescente.

Então, pelo Teorema das sucessões monótonas, existe um limite L que terá que verificar a igualdade $L=\sqrt{1+L}$.

Tem-se $L^2=1+L \Leftrightarrow L^2-L-1=0 \Leftrightarrow L=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4\times(-1)}}{2} \Leftrightarrow L=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Como a sucessão é de termos positivos, resulta que $L=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, que é o número de ouro.

Capítulo V - Sugestões e correspondente enquadramento curricular

Destacam-se em seguida exemplos, alguns dos quais integram os capítulos anteriores, e que são susceptíveis de contribuir para o estabelecimento de um fio condutor entre as possíveis abordagens nos vários níveis de ensino e que promovam o estabelecimento de conexões com outros temas curriculares.

Os números poligonais

Estes números potenciam abordagens adequadas aos três ciclos do ensino básico.

No 1º ciclo a sua utilização deve limitar-se à utilização das figurações geométricas para promover a exploração de regularidades e a desafiar os alunos a determinar um número poligonal desde que conheça o que o antecede.

No 2º ciclo os alunos podem ser levados a estabelecer relações entre números poligonais consecutivos que permitam o estabelecimento de expressões geradoras.

No 3º ciclo será interessante tirar partido da figuração geométrica para deduzir a validade de algumas igualdades numéricas.

No ensino secundário essas igualdades numéricas podem ser retomadas e analisadas independentemente do enquadramento visual e tirando partido do raciocínio por indução.

As progressões

As progressões constituem um tipo especial de sucessões definidas por recorrência em que cada termo se obtém do anterior por adição de uma parcela constante ou por multiplicação por um factor constante. Estas sucessões proporcionam desafios interessantes a explorar em diferentes níveis de ensino.

A "colocação dos toldos" e os "segredos mal guardados" podem ser adaptados a diferentes níveis de escolaridade.

No 2º ciclo e em ambas as situações os alunos podem reconhecer a lei de formação dos termos das sucessões e calcular a soma de alguns termos consecutivos.

No ensino secundário, mais precisamente no 11º ano, estes dois exemplos podem ser usados como introdutórios ao estudo das progressões.

Também as propostas do tópico "Perímetro, área e somas infinitas", embora dirigidas ao 11º ano, uma vez que envolvem simultaneamente a noção de sucessão e limite, podem ser adaptadas ao 3º ciclo, por exemplo, pedindo apenas a sua lei de formação.

A sucessão de Fibonacci

Esta sucessão é frequentemente referida nos currículos desde níveis elementares e permite abordagens no âmbito do ensino básico, como as ilustradas em "III – Curiosidades com números".

Os números π, e e φ

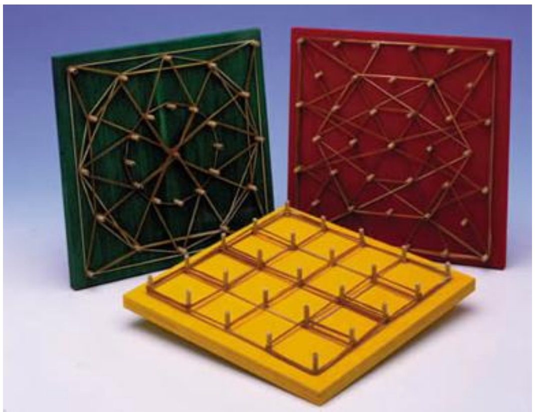
A obtenção de valores aproximados de π, e e φ proporcionam, entre outras, aplicações do Teorema das Sucessões Monótonas pelo que se enquadram no currículo do Ensino Secundário. Os números π e φ permitem ainda abordagens mais elementares que poderão ser consideradas no Ensino Básico.

O número π

As aproximações por construção de polígonos inscritos e circunscritos numa circunferência unitária podem ser adaptadas a diferentes níveis de ensino para estudar aproximações do número π.

No 2º ciclo pode recorrer-se à marcação de ângulos para desenhar alguns polígonos inscritos numa circunferência unitária e verificar que, à medida que o número de lados aumenta, a área destes polígonos se aproximam da área (igual a π do círculo unitário). Neste nível de ensino essa verificação deve ser visual. Para tal, podem colorir-se os sucessivos polígonos e verificar que o espaço interior ao círculo por pintar diminui com o aumento do número de lados.

Esta actividade poderá ser estendida ao 1º ciclo, com a utilização do "Geoplano".



No 3º ciclo podem determinar-se perímetros de alguns destes polígonos (triângulo, quadrado, hexágono) assim como de polígonos circunscritos e construir aplicações por defeito e por excesso do número π.

No ensino secundário podem determinar-se os termos gerais das sucessões cujos termos são os perímetros desses polígonos, justificar que ambas as sucessões têm o mesmo limite e relacioná-lo com o número π.

O cálculo de aproximações de π, apresentadas nas páginas 49 a 54, poderão ser abordadas no âmbito do primeiro ano de cadeiras de Análise Matemática/ Cálculo do ensino superior.

O número e

Este número é definido no currículo do Ensino Secundário como limite da sucessão de termo geral $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. O grau de dificuldade do estudo desta sucessão, não permite que ela seja abordada em níveis mais elementares. A determinação de aproximações deste número constituem situações a explorar a partir do 11º ano. A demonstração de que o número e está compreendido entre 2 e 3 ultrapassa claramente o ensino secundário e poderá ser abordada no âmbito do primeiro ano de cadeiras de Análise Matemática/ Cálculo do ensino superior.

O número φ

O facto de o número φ poder ser obtido como limite de uma sucessão definida por recorrência, $\begin{cases} u_1 = \sqrt{1} \\ u_n = \sqrt{1+u_{n-1}} \end{cases}, n \geq 2$, volta a inserir este número, já referido em contextos geométricos (ver apêndice), no âmbito de uma aplicação do tópico sucessões do 11º ano.

Capítulo VI – Conclusões

Atendendo ao trabalho exposto, considero legítimo concluir que nos programas em vigor as sequências/ sucessões são pouco exploradas/ aprofundadas numa lógica de continuidade, desde a sua introdução nos primeiros anos escolares, até abordagens e conteúdos teóricos mais rigorosos, aprofundados no ensino secundário. A este propósito, saliento a utilidade dos números poligonais na abordagem das sequências nos primeiros anos escolares, já que as suas expressões geradoras surgem naturalmente recorrendo às figuras geométricas. Estas sequências prestam-se a desenvolvimentos interessantes no âmbito do ensino secundário, nível de ensino em que são habitualmente esquecidas. Seria desejável estabelecer um fio condutor ao longo dos diferentes níveis de escolaridade, de forma a aproveitar e ampliar os conhecimentos que vão sendo adquiridos. Os exemplos utilizados ao longo do texto e sistematizados no capítulo IV.1. pretendem dar algumas pistas para concretizar esse objectivo.

Arrisco-me ainda afirmar, que as definições de sequência e de sucessão sustentadas pelo novo programa de Matemática, geram confusões e incoerências que seriam facilmente ultrapassadas com a utilização de uma única designação, sequência (finita ou infinita), como acontece, aliás, em francês (suite) e em inglês (sequence).

O tema das sucessões suscita a curiosidade dos nossos alunos sobretudo quando é objecto de explorações envolvendo a criação/utilização de representações gráficas e aplicações informáticas que sustentem os conceitos apresentados. Estas abordagens criam também uma interdisciplinaridade entre as novas tecnologias de informação e comunicação e a matemática, que enriquecem substancialmente as competências de alunos e jovens tão necessárias ao seu competente ingresso num mercado de trabalho competitivo (em que o raciocínio prático e a resolução rápida e ágil de problemas poderá determinar o seu futuro).

Referências

- Bentley, Peter J., THE BOOK OF NUMBERS – THE SECRET OF NUMBERS AND HOW THEY CHANGED THE WORLD, 3ª Edição , 2008, A Firefly Book [1]
- Bivar, António, Grosso, Carlos, Oliveira, F., Timóteo, M. Clementina, METAS CURRICULARES, ENSINO BÁSICO, MATEMÁTICA, 2013, Ministério da Educação, DGIDC [2]
- Caraça, Bento de Jesus, CONCEITOS FUNDAMENTAIS DA MATEMÁTICA, 1ª Edição, Dezembro 1951, Tipografia Matemática, Lda [3]
- Carvalhal, M. Fernanda, Barros, M. Guilhermina, Martinho, M. Helena, MATEMÁTICA 8, 2º VOLUME, 1ª Edição, 1999, Texto Editora [4]
- Ferreira, J. Campos, INTRODUÇÃO À ANÁLISE MATEMÁTICA, 7ª Edição, Setembro de 1999 , Serviço de Educação, FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN [5]
- Figueira, Mário S. F., FUNDAMENTOS DE ANÁLISE INFINITESIMAL, 3ª Edição, 2001, Textos de Matemática, volume 5, Editor Luís Trabucho, UNIVERSIDADE DE LISBOA, Faculdade de Ciências, Departamento de Matemática [6]
- Gomes, Francelino, Viegas, Cristina, Lima, Yolanda, XEQMAT, MATEMÁTICA A, 11º ANO, VOLUME 2, 1ª Edição, 2008, Texto Editores, Lda [7]
- Lima, Yolanda, Gomes, Francelino, XEQMAT MATEMÁTICA 11º ANO, 2ª Edição, 1998, Editorial O Livro [8]
- Nápoles, Suzana, Freitas, Pedro J., Sequeira, Luís, NÚMEROS E OPERAÇÕES, PROGRAMA DE FORMAÇÃO CONTÍNUA EM MATEMÁTICA PARA PROFESSORES DOS 1º. E 2º. CICLOS DO ENSINO BÁSICO, 2009, Ministério da Educação, DGIDG [9]
- Neves, Maria Augusta F., Faria, Luísa, Silva, Jorge Nuno, MATEMÁTICA 6º ANO, PARTE 2, 1ª Edição, 2011, Porto Editora [10]
- Nogueira, Joaquim Eurico, A MAGIA DAS SUCESSÕES, 1ª Edição, Junho 2008, Leituras em Matemática, Sociedade Portuguesa de Matemática [11]
- Nogueira, Joaquim Eurico [et al], CONTAR E FAZER CONTAS – UMA INTRODUÇÃO À
  TEORIA DOS NÚMEROS, Gradiva/SPM, 2004 [12]
- Pappas, Theoni, FASCÍNIOS DA MATEMÁTICA – A DESCOBERTA DA MATEMÁTICA QUE NOS RODEIA (Título da versão original: The Joy of Mathematics), tradução portuguesa a partir da 21ª impressão, Abril 2006, Editora Replicação [13]
- Passos, Iolanda Centeno, Correia, Olga Flora, MATEMÁTICA EM AÇÃO 8, PARTE 2, 1ª Edição, 2011, Lisboa Editora [14]
- Ponte, João P., Serrazina, Lurdes, Guimarães, H., Breda, Ana, Guimarães, F. Sousa, H., Menezes, Luís, Martins, M. Eugénia, G., Oliveira, Paulo A., PROGRAMA DE MATEMÁTICA DO ENSINO BÁSICO, 2007, Ministério da Educação, DGIDC [15]

- Ribeiro, Adília, Branco, A. Paula, Pona, Fátima, Sousa, Helena I., Dias, Isabel, A SOLUÇÃO MATEMÁTICA 11, 1ª Edição, 1998, Texto Editora [16]
- Rodrigues, Conceição, Santos, Fátima, Leitão, Teresa, MATEMÁTICA 8, 1ª Edição, Maio 1999, Plátano Editora [17]
- Sebastião e Silva, J., Silva Paulo, J., COMPÊNDIO DE ÁLGEBRA, Tomo 1 – 6ºano , 2ª edição, 1970, Livraria Rodrigues [18]
- Soveral, Ana A., Silva, Carmen Viegas, MATEMÁTICA a, 11º ANO, VOLUME 3, 1ª Edição, 2005, Texto Editores [19]

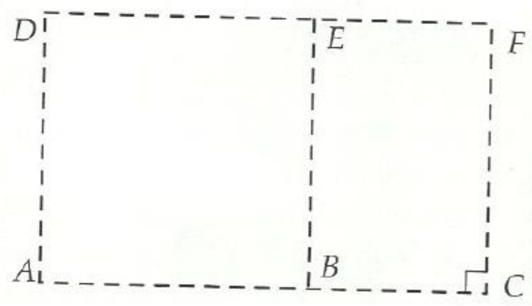
- http://www.apm.pt/files/178672_Segment_001_4d3de4ed6e285.pdf [20]
- http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm34/ [21]
- http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2002/icm101/numerospoligonais.html [22]
- http://www.matematica.com.pt/page/Novos-Programas-de-Matematica.aspx [23]
- http://www.matematicadinamica.com/ficheiros/geometria.html [24]
- http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm98/icm11/historiadopibotao.htm [25]
- http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm34/xadrez.htm [26]
- http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm98/icm11/metododearquimedes.htm [27]
- http://www.fc.up.pt/mp/machaves/est00/vitor/suc_pag/SUC-26-5.HTM [28]
- http://www.math.ist.utl.pt/files/ppgmutlsucessoes.pdf [29]
- http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm43/plano.htm#Circunferencia_opcoes [30]
- http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm43/rectouro.htm [31]
- http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm43/pi.htm [32]
- http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm43/pol_insc.htm#Infinito [33]

Apêndice

No 2º ciclo, quando são introduzidas as sucessões/ sequências, poderia pedir-se aos alunos que, de acordo com a lei de formação da sucessão de Fibonacci (indicada previamente) e apresentando especificamente o problema do casal de coelhos, tentassem obter alguns dos termos seguintes.

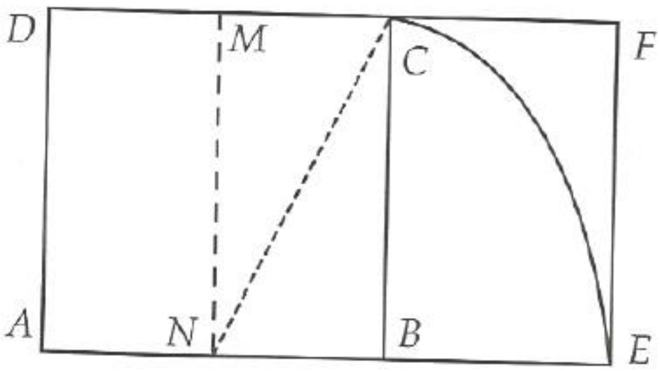
Ainda no 2º ciclo, o número de Ouro pode ser referido na altura em que são dadas as razões entre os lados, perímetros e áreas dos triângulos, e, nesse caso, poderia estender-se a noção de razão, a uma “razão especial”, a razão de ouro/ proporção de ouro que está subjacente ao rectângulo de ouro.

Para o 3º ciclo, no capítulo dedicado à Geometria poderia fazer-se a construção do rectângulo de ouro. Por exemplo, as duas construções que se seguem:



1) Dado um segmento $[AC]$, tal que B divida o segmento de acordo com a proporção de ouro, constrói-se o quadrado $[ABED]$.
2) Traça-se $[CF]$ perpendicular a $[AC]$.
3) Prolonga-se o lado $[DE]$ até que este intersecte $[CF]$ no ponto F. A figura $[ACFD]$ é o rectângulo de Ouro.

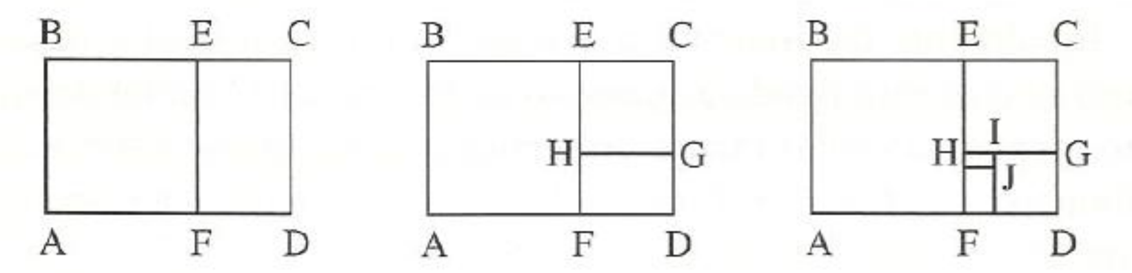
Outro processo de construção sem ter previamente o segmento $[AC]$ dividido segundo a proporção de ouro:



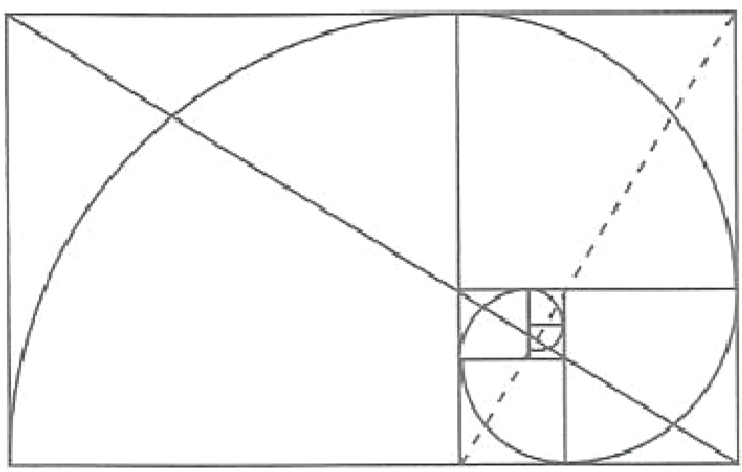
1) Constrói-se um quadrado qualquer, $[ABCD]$.
2) Bissecta-se a figura por meio do segmento $[MN]$.

3) Com um compasso, traça-se o arco EC, tendo como centro o ponto N e raio CN.
4) Prolonga-se o lado $[AB]$ até que este intersecte o arco traçado no ponto E.
5) Prolonga-se o lado $[DC]$.
6) Perpendicularmente ao segmento $[AE]$, traça-se o segmento $[EF]$, que irá intersectar $[DC]$ no ponto F. O rectângulo $[AEFD]$ é um rectângulo de ouro.

O rectângulo de ouro tem ainda a particularidade de se gerar a si próprio. Se analisarmos a imagem que se segue,



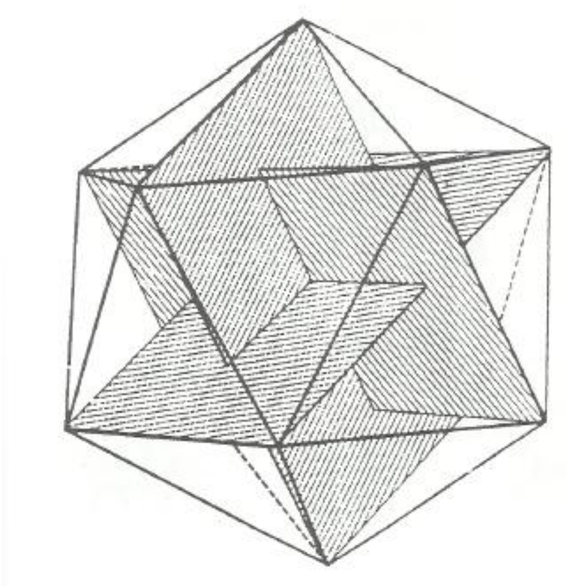
verificamos que a partir do rectângulo de ouro $[ABCD]$, pode facilmente construir-se o rectângulo de ouro $[ECDF]$, a partir da construção do quadrado $[ABEF]$ e o rectângulo de ouro $[DGHF]$ a partir do quadrado $[ECGH]$, podendo este processo ser prolongado indefinidamente. Se usarmos um número infinitamente grande de rectângulos de ouro, contidos uns nos outros, podemos construir a *espiral equiangular* (também conhecida por *espiral logarítmica*). Para realizar esta construção, apenas recorremos aos quadrados construídos e, com o compasso, traçam-se arcos que são quartos de circunferência contidos em cada um dos quadrados. Observando a figura que se segue, vemos que a intersecção das diagonais desenhadas é o polo ou centro da espiral.



Estas construções, além de familiarizarem os alunos com a proporção de ouro, dar-lhes-iam destreza na utilização de esquadro, régua e compasso.

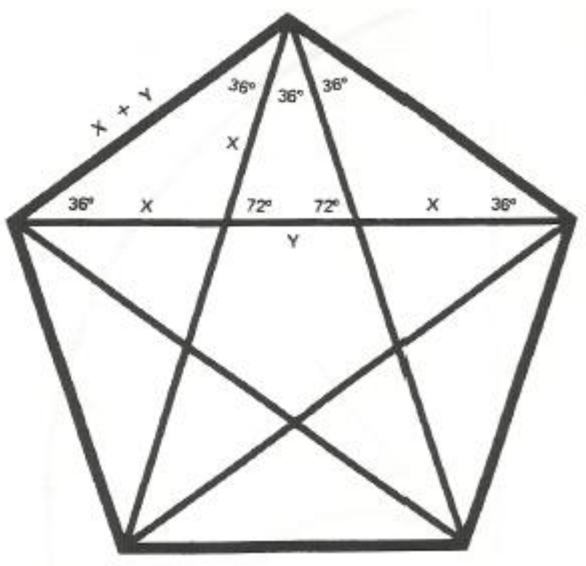
Outras curiosidades geométricas, também a propósito do rectângulo de ouro, e possíveis de serem aprofundadas estão presentes na obra, de nome *De Divine Proportione*, do matemático Luca Pacioli, publicado em 1509, onde são apresentados os primeiros e fascinantes exemplos da *proporção de ouro* nas geometrias do plano e do espaço. Seguem-se dois exemplos:

(1) A figura que se segue, no qual três rectângulos de ouro se intersectam simetricamente e, cada um deles, perpendicularmente aos outros dois. Os vértices destes três rectângulos coincidem com os doze vértices de um icosaedro regular.



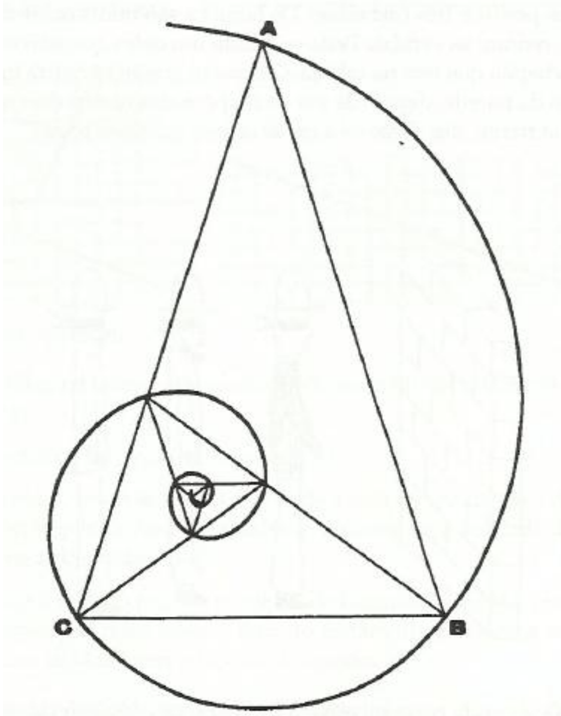
(2) O Pentágono, o Pentagrama e o Triângulo de Ouro

O pentagrama é gerado a partir de um pentágono regular, quando se desenham as suas diagonais. Dentro do pentagrama, existem Triângulos de Ouro. Estes triângulos determinam razões de ouro nos lados do pentagrama.



O *Triângulo de Ouro* é um triângulo isósceles que tem na base ângulos de 72° e no vértice superior um ângulo com 36° de amplitude. Os lados congruentes estão para a base segundo a *razão de ouro*.

Quando bissectamos o ângulo da base, a bissectriz divide o lado oposto de acordo com a razão de ouro e origina dois triângulos isósceles de menores dimensões. Um destes triângulos é semelhante ao triângulo original, enquanto o outro também pode ser utilizado para gerar uma espiral. A continuação do processo de bissecção do ângulo da base, do novo triângulo de ouro obtido, provoca uma série de triângulos de ouro e a formação de uma espiral equiangular.



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \textit{razão de ouro},\ \phi = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)}{2} \approx 1{,}6180339\ldots$$